

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$
$$x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Limites et dérivées

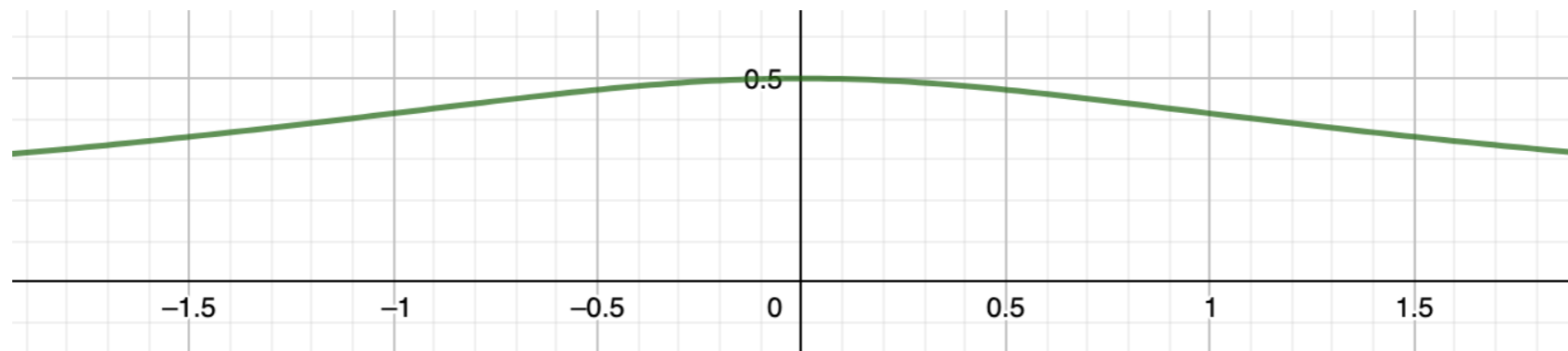
Philippe Chabloz

Limite de f au point x_0

Exemple introductif : considérons la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}.$$

Elle n'est pas définie en $x = 0$ ($\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$) mais si on observe les valeurs de f ainsi que son graphe on constate que la fonction se comporte comme si sa valeur en $x = 0$ était égale à $1/2$.



x	$f(x)$
-0.1	0.4987562
-0.01	0.4999875
-0.001	0.4999999

x	$f(x)$
0.1	0.4987562
0.01	0.4999875
0.001	0.4999999

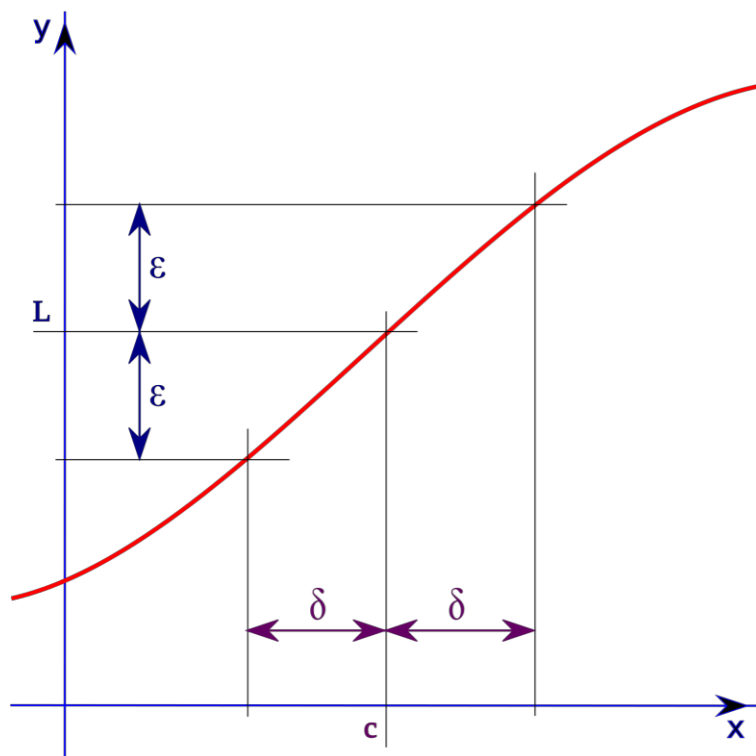
Limite d'une fonction

Supposons que f soit une fonction à valeur réelle et que c et L soient des nombres réels. *Intuitivement*, l'expression

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

signifie que $f(x)$ peut être rendu aussi proche de L que souhaité, en rendant x suffisamment proche de c .

Dit autrement, la fonction $f(x)$ a pour limite le nombre L quand x tend vers c si l'écart entre $f(x)$ et L finit toujours par être plus petit que n'importe quelle marge fixée, pourvu que x soit suffisamment proche de c , mais non égal à c .



(ε, δ) -définition de la limite

Augustin-Louis Cauchy et Karl Weierstrass (XIXe siècle) :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathcal{D}_f \quad 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

- ❖ " $f(x)$ devient arbitrairement proche de L " signifie que $f(x)$ se trouve finalement dans l'intervalle $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.
- ❖ L'expression "lorsque x s'approche de c " indique alors que nous nous référons à des valeurs de x dont la distance par rapport à c est inférieure à un certain nombre positif δ .

Limite gauche et droite

La **limite à gauche de $f(x)$ en c** (ou la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers c *par la gauche*) est égale à L et on note

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$$

signifie que les valeurs de $f(x)$ deviennent arbitrairement proches de L en prenant x suffisamment proche de c mais **strictement inférieur** à c .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathcal{D}_f - \delta < x - c < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

La **limite à droite de $f(x)$ en c** (ou la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers c *par la droite*) est égale à L et on note

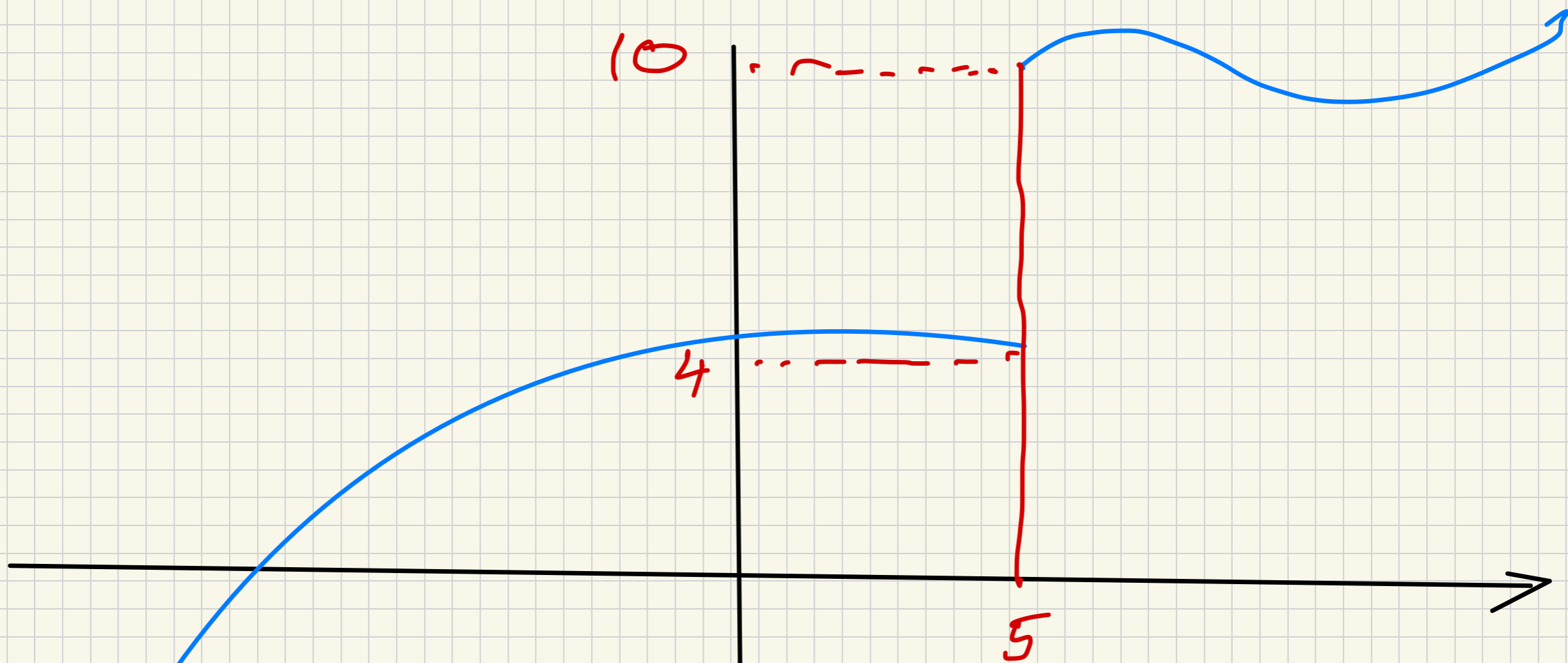
$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

signifie que les valeurs de $f(x)$ deviennent arbitrairement proches de L en prenant x suffisamment proche de c mais **strictement supérieur** à c .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathcal{D}_f 0 < x - c < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Propriété

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \quad \text{si et seulement si} \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$$



$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 10$$

Propriétés algébriques des limites

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions définies au voisinage de c , mais pas forcément en c , telles que

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L_1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L_2$$

Alors :

1. $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$
2. $\lim_{x \rightarrow c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L_1$ quel que soit $k \in \mathbb{R}$
3. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = L_1 \cdot L_2$
4. $\lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{L_1}{L_2}$ si $L_2 \neq 0$

Les propriétés précédentes s'appliquent aussi aux limites à droite ou à gauche.

Théorème des gendarmes

Soient f , g et h trois fonctions définies au voisinage de c , mais pas forcément en c , telles que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Si $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$

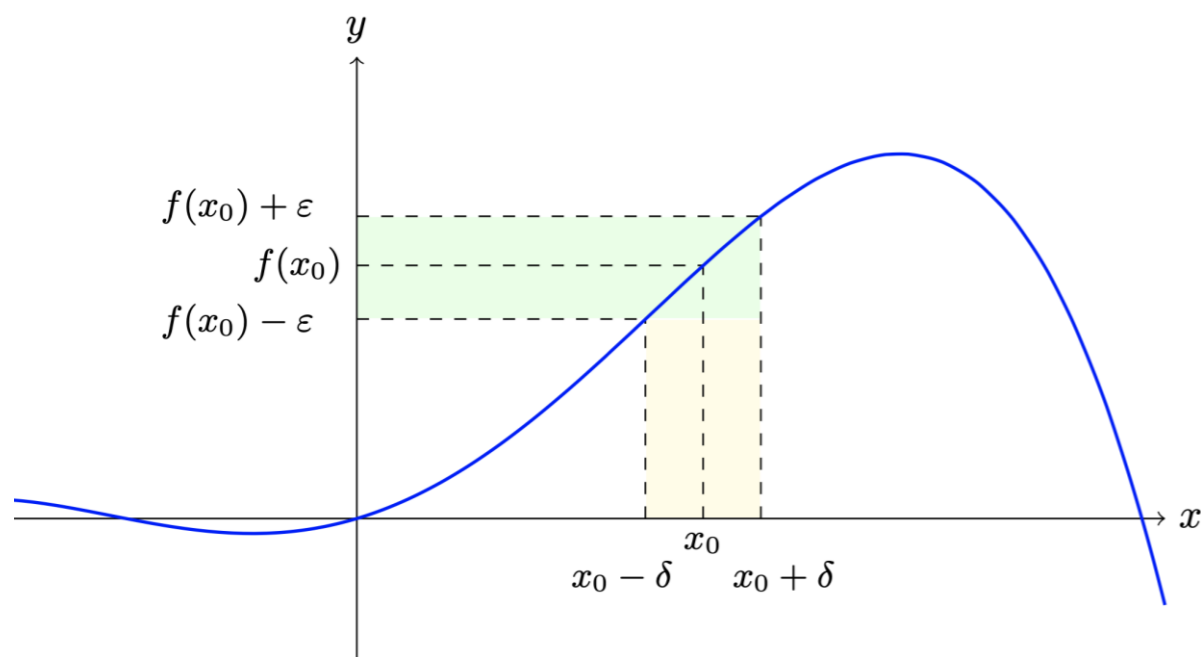
alors

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$$

Continuité d'une fonction en un point

Définition: une fonction f est dite **continue** en x_0 si elle est définie en x_0 et si sa limite lorsque x tend vers x_0 est égale à $f(x_0)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$



Les fonction « *classiques* », c.-à-d. les fonctions **polynomiales** et **rationnelles**, les **exponentielles** et les **logarithmes**, les **fonctions trigonométriques** et leurs **réciroques**, les **fonctions hyperboliques** et leurs **réciroques**, sont continues sur leur domaine définition (c.-à-d. qu'elles sont continues en tout point de leur domaine de définition).

Les **sommes**, **produits**, **quotients** et **composées** de fonctions continues sont continues sur leur domaine de définition.

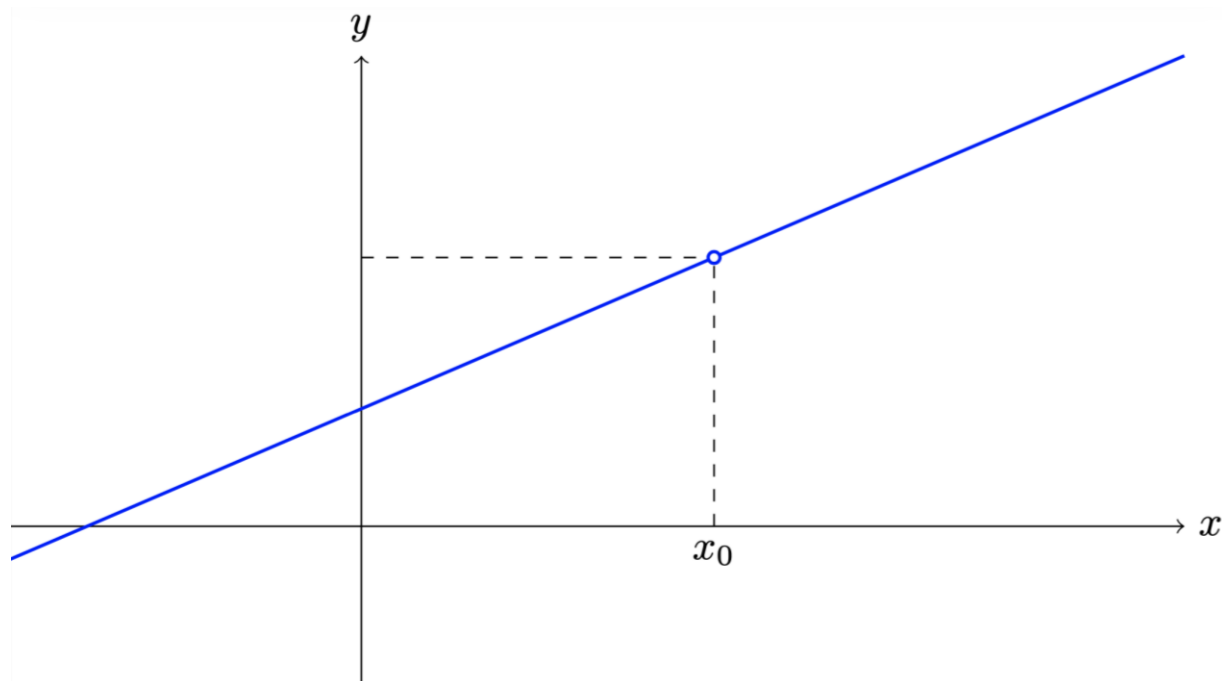
La fonction $f(x)$ peut être définie en x_0 mais sa limite lorsque x tend vers x_0 peut être différente de $f(x_0)$. Dans un tel cas, la fonction f est dite **discontinue** en x_0 .

Exemples de fonctions discontinues

Exemple (*trou*)

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \frac{(x-3)(x+1)}{x-3}$$

est discontinue en $x_0 = 3$.

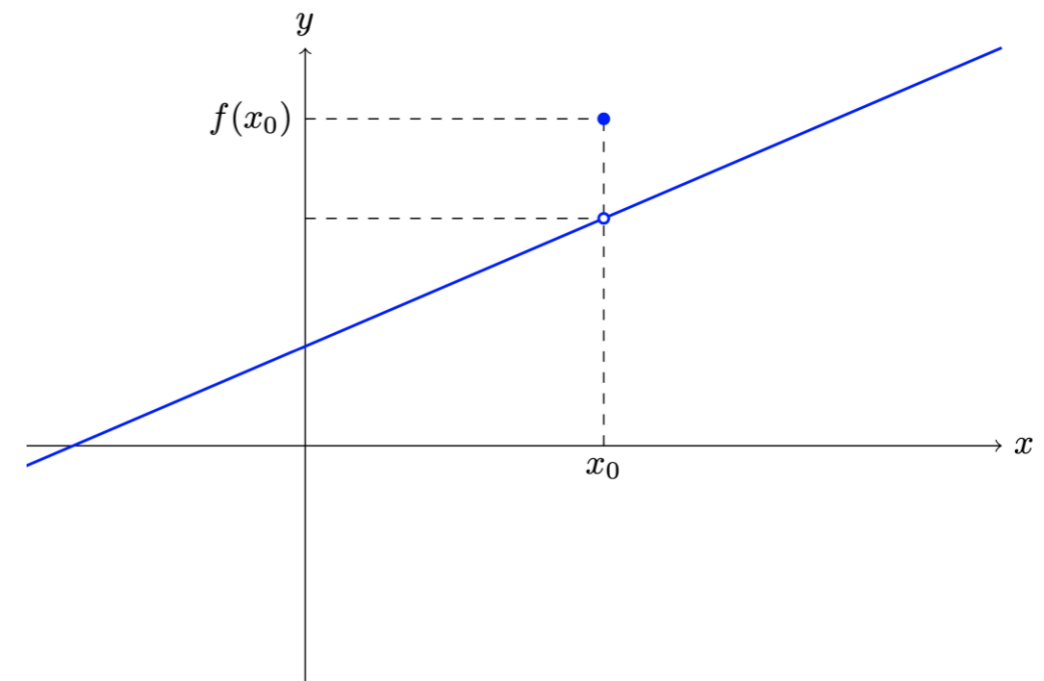


$f(x_0)$ n'existe pas !

Exemple (*déplacement*)

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \neq 5 \\ 9 & \text{si } x = 5 \end{cases}$$

est discontinue en $x_0 = 5$.



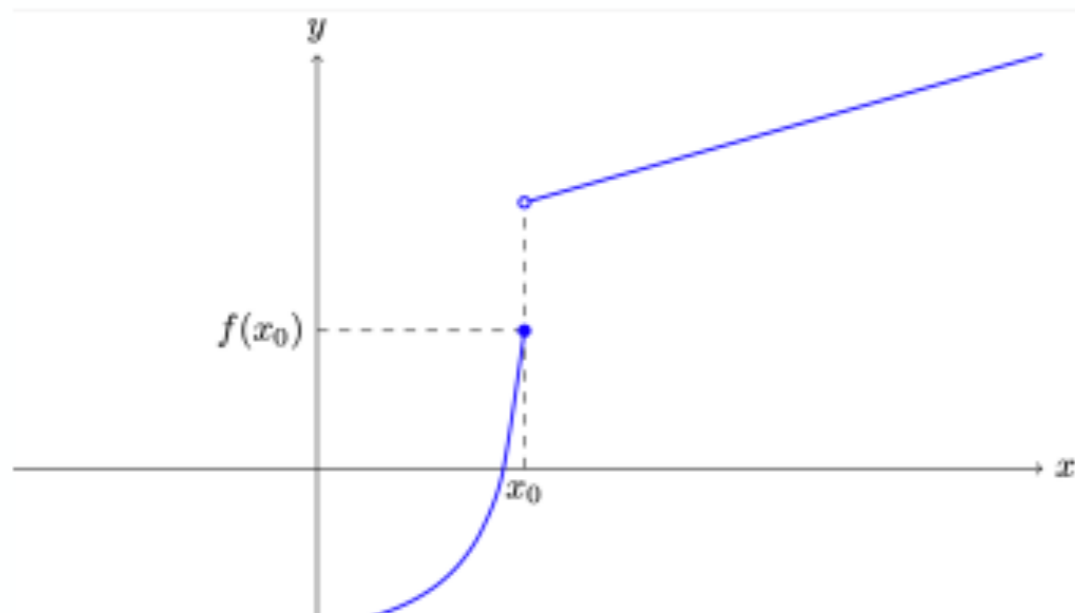
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$

Discontinuités apparentes de *saut* et *infinie*

Exemple (*saut*)

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x > 2 \\ x^2 - 2 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$

est discontinue en $x_0 = 2$.

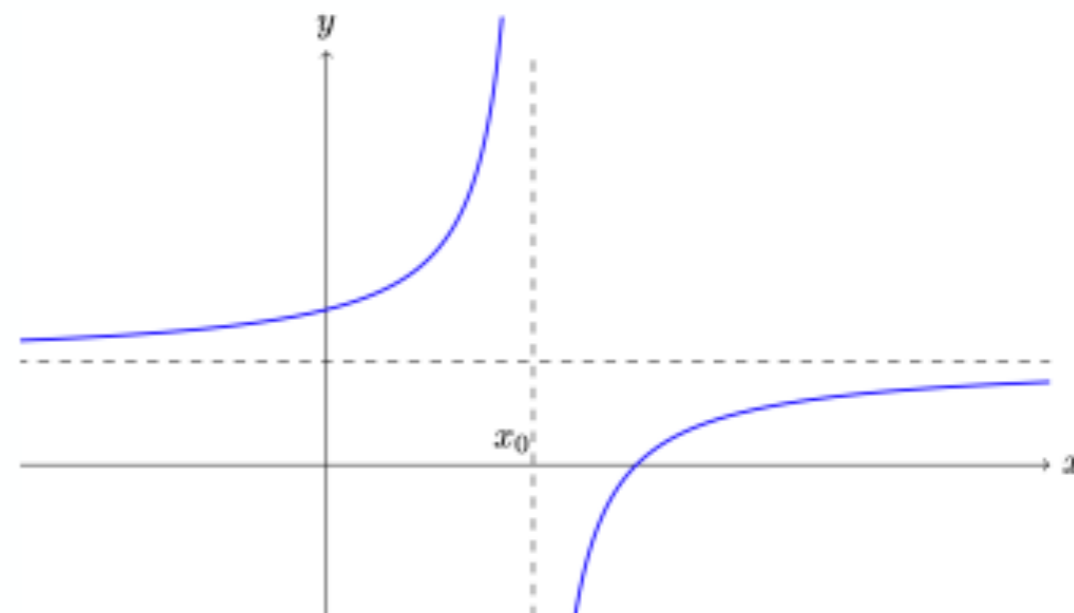


$$\begin{array}{l} f(x_0) \text{ existe} \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \end{array}$$

Exemple (*infinie*)

$$f(x) = \frac{x - 3}{x - 2}$$

est discontinue en $x_0 = 2$.



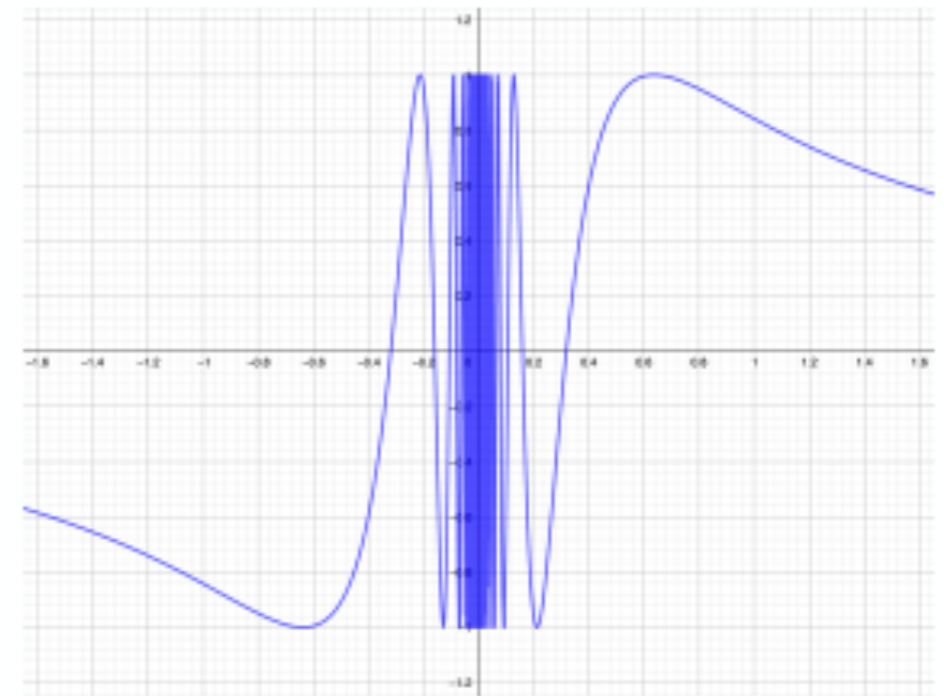
$$\begin{array}{l} f(x_0) \text{ n'existe pas !} \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \end{array}$$

Discontinuité *essentielle*

Exemple (*Cauchy 1821*)

$$\text{La fonction } f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

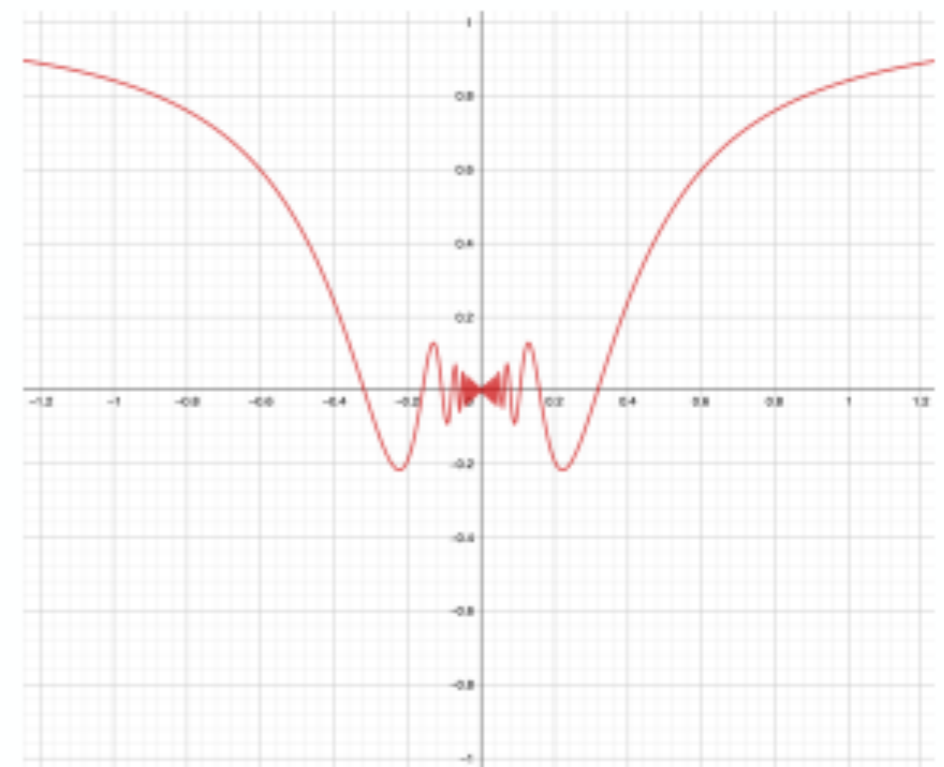
est discontinue en $x_0 = 0$ car $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ n'existent pas !



Exemple (*Weierstrass 1874*)

$$\text{La fonction } f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue en $x_0 = 0$.

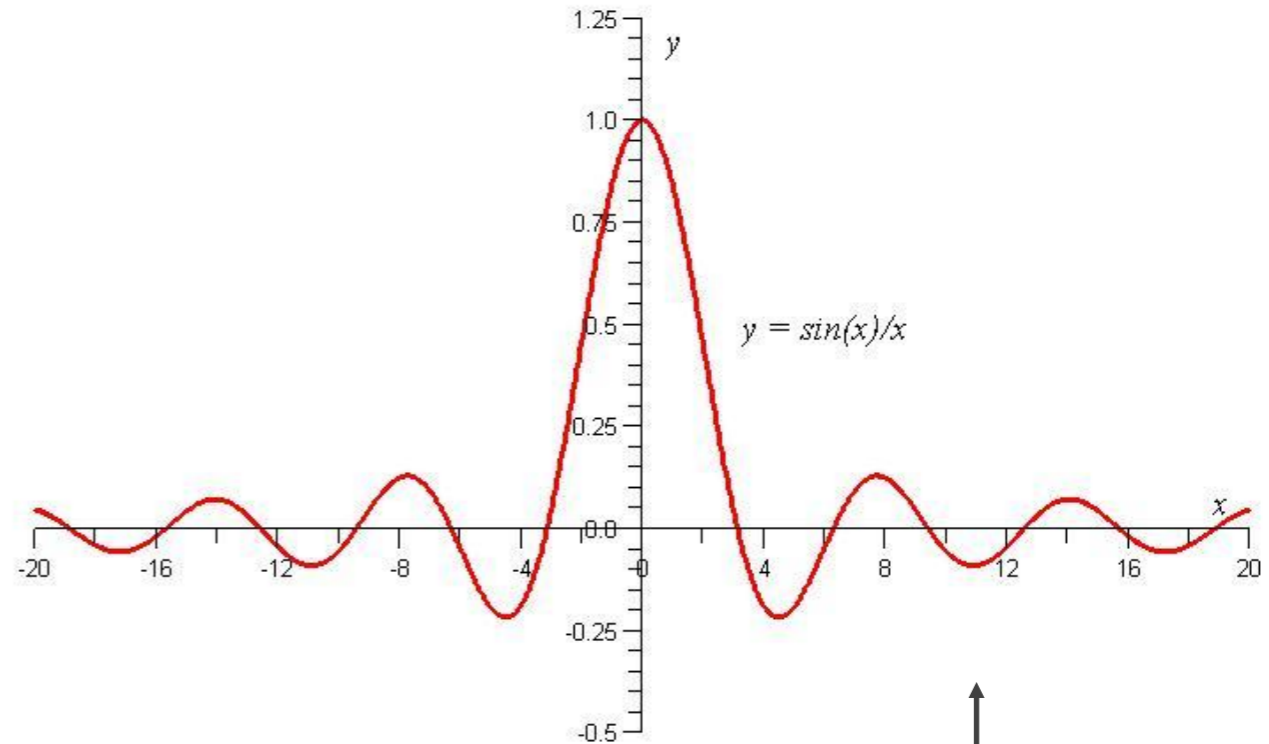


Exemple $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Que vaut $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$?

3 façons (au moins) de lever l'indétermination:

1. majoration
2. série de Taylor
3. règle de l'Hospital



1. Majoration : pour x petit on a

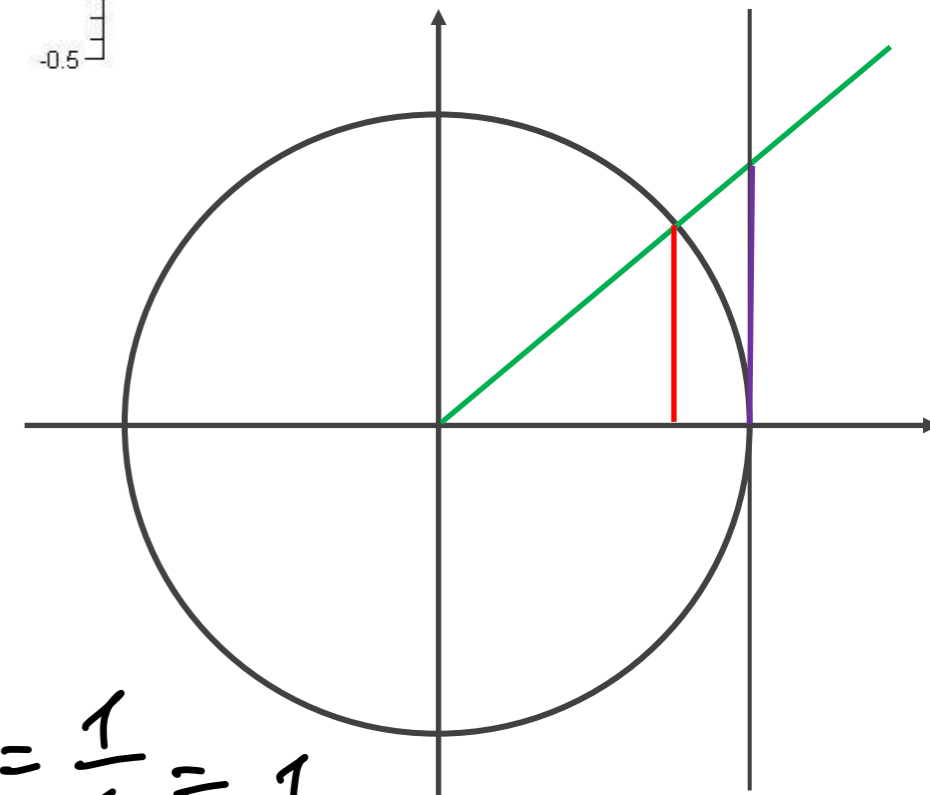
$$\sin(x) < x < \tan(x)$$

En divisant par $\sin x$ on obtient

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$$

En faisant tendre x vers 0 on obtient, par le théorème des gendarmes que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{1} = 1.$$



$$\text{Exemple } f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Série de Taylor:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}{x} = \frac{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots}{1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

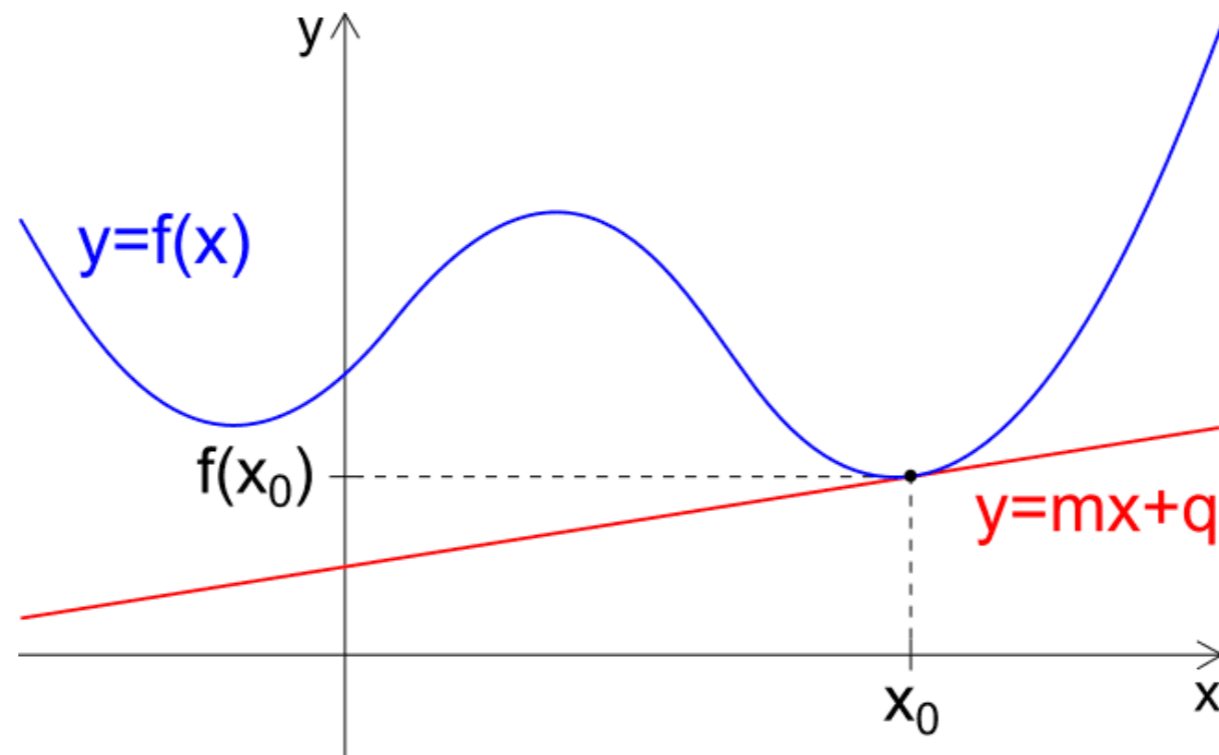
$$\sin x \approx x \quad \text{et} \quad x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Tangente à une courbe

Problème géométrique :

Étant donné une courbe continue d'équation $y = f(x)$ et un point $(x_0, f(x_0))$ sur la courbe ($x_0 \in \mathbb{R}$), nous cherchons à déterminer l'équation de la droite tangente à la courbe en ce point $(x_0, f(x_0))$.



Puisque la tangente doit passer par le point $(x_0, f(x_0))$, tout ce que nous avons besoin de connaître est m : la pente de la droite.

Tangente à une courbe

Solution proposée par Newton et Leibniz (XVIIe siècle) :

Soit $h \in \mathbb{R}$ une *petite quantité infinitésimale*. Nous cherchons la pente de la droite sécante qui passe par le deux points :

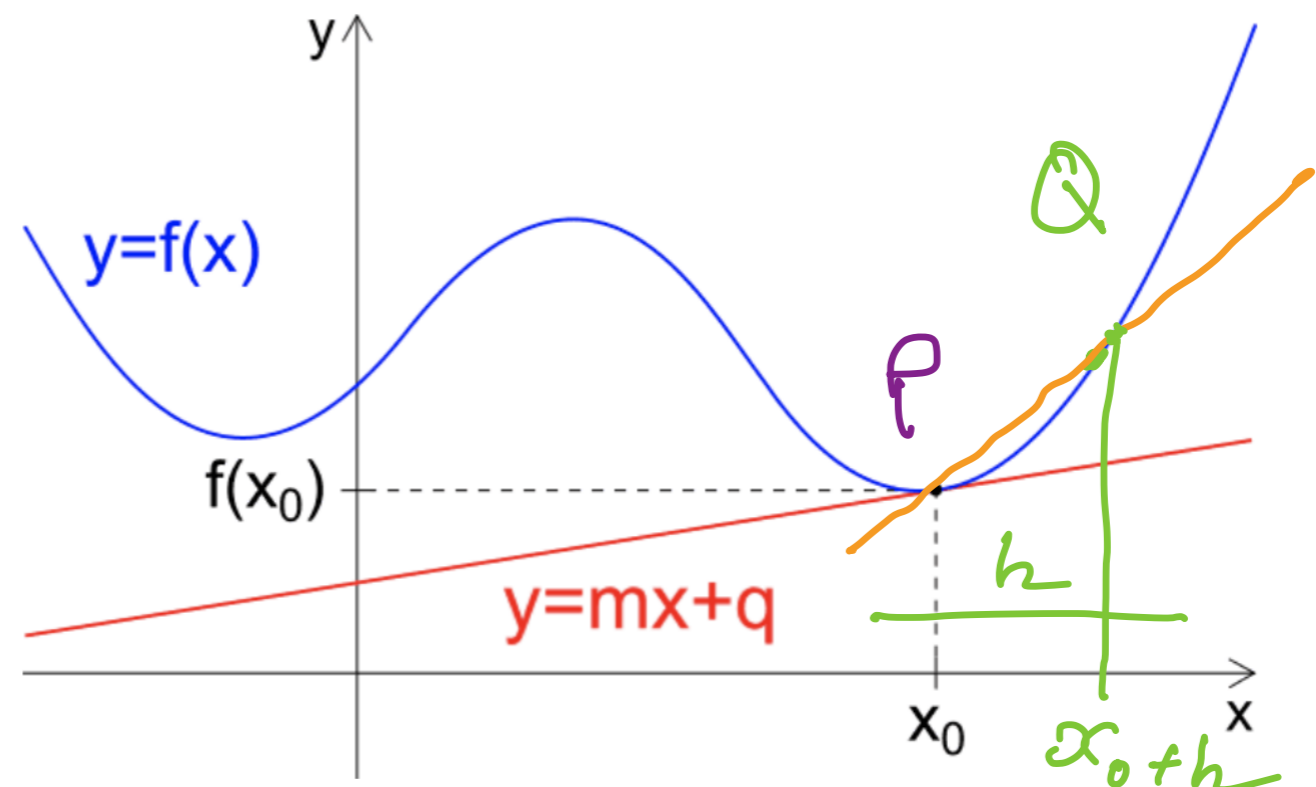
P $(x_0, f(x_0))$ et Q $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.

La pente de la droite sécante vaut

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

On définit la **dérivée de la fonction continue f en x_0** comme la limite de la pente des droites sécantes pour h qui tend vers 0 :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



La dérivée

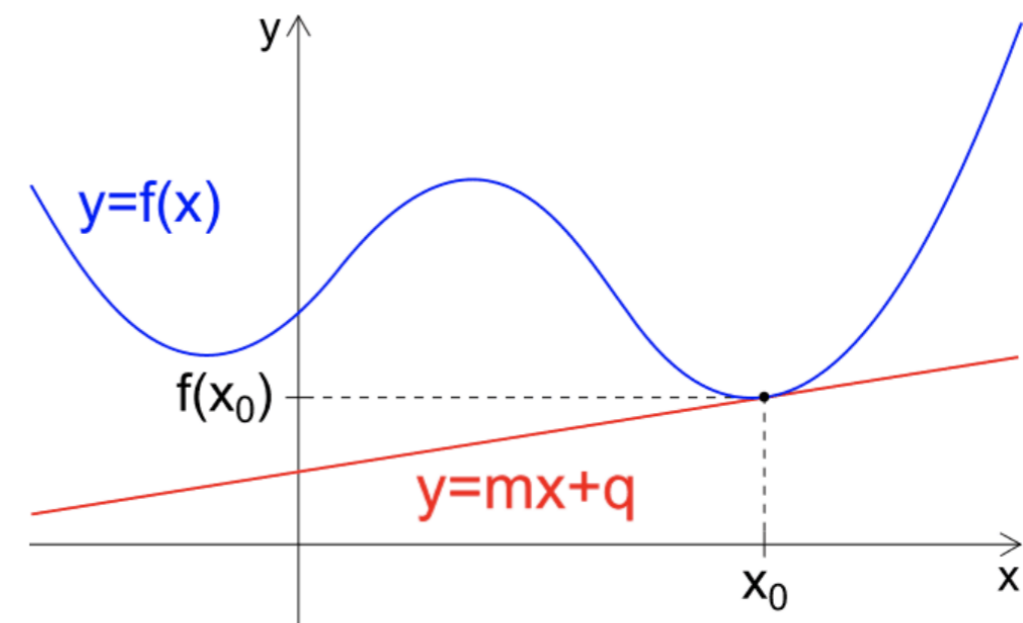
Soit une courbe décrite par une fonction continue $y = f(x)$. La **pente de la droite tangente à la courbe en un point $(x_0, f(x_0))$** est la limite de la pente de la droite sécante qui passe par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, quand $h \in \mathbb{R}^+$ se rapproche de plus en plus de zéro, c'est-à-dire :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

Si cette limite existe, $f'(x_0)$ est appelée la **dérivée** de la fonction f en $x = x_0$ et on dit que **la fonction f est dérivable en $x = x_0$** .

Motivations pour étudier la dérivée première :

- ❖ Le calcul de l'angle d'intersection de deux courbes (Descartes).
- ❖ La construction de lunettes astronomiques (Galilée) et d'horloges (Huygens)
- ❖ La recherche de maxima et minima d'une fonction (Fermat)
- ❖ Le calcul de vitesse et de l'accélération d'un mouvement (Galilée, Newton)
- ❖ La vérification des lois de gravitation en astronomie (Kepler, Newton)



Premiers exemples

Exemple 1 : pente d'une droite

Pour vérifier que la définition précédente est correcte, nous considérons le cas le plus simple possible :

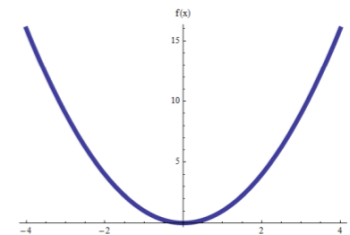
$$f(x) = ax + b \text{ où } a \in \mathbb{R}^* \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

c'est-à-dire f représente une droite. Nous nous attendons à trouver que la pente de la droite tangente est constante et vaut a . En effet :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x_0+h) + b - (ax_0 + b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah}{h} = a$$

Exemple 2 : pente d'une parabole

Considérons une parabole décrite par l'expression $f(x) = x^2$.



Nous nous attendons à trouver que la pente de la droite tangente soit égale à 0 si x_0 est nul et elle doit augmenter au fur et à mesure que l'on s'éloigne de zéro :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x_0 + h = 2x_0$$

Premiers exemples

Exemple 3 : dérivée de l'exponentielle. Soit $f(x) = e^x$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} e^h - e^{x_0}}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} e^{x_0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0}$$

La dernière égalité vient de:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3!} \dots\right] - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3!} + \dots}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3!} + \dots\right) = 1$$

Équation de la droite tangente

Solution au problème de la tangente :

Si la dérivée de la fonction continue f en x_0 existe, c'est-à-dire si la limite suivante existe

$$m = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

$$y = mx + h$$

alors la tangente au graphe de la fonction $y = f(x)$ passant par le point $(x_0, f(x_0))$ est bien définie et son équation est :

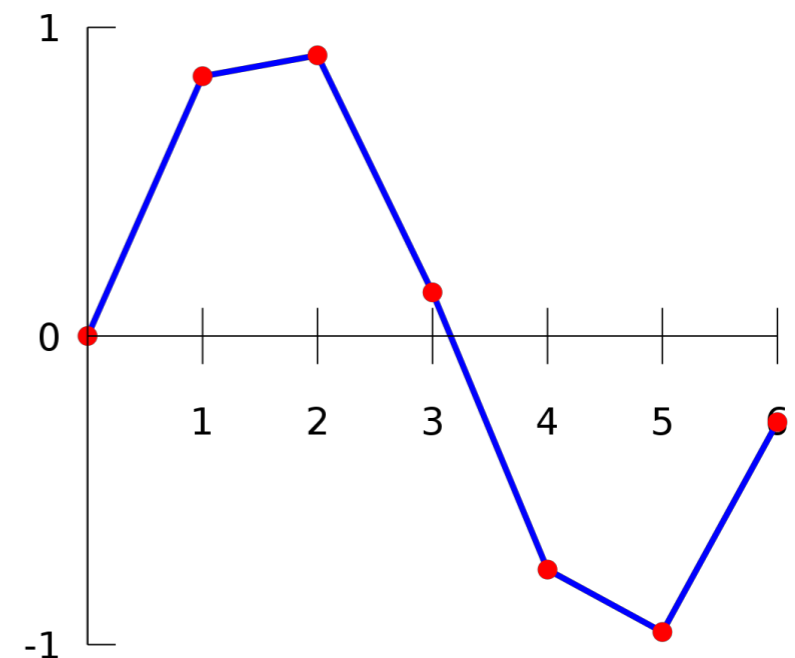
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

x_0 fixé
 x est la variable

Soit \mathcal{D}_f est le domain de la fonction f . Si pour chaque $x \in \mathcal{D}_f$ la dérivée de la fonction f en x existe on dira que la fonction f est dérivable en \mathcal{D}_f (ou *smooth* en anglais).

Exemple :

La fonction représentée à droite est un exemple de fonction continue dans l'intervalle $]0,6[$ mais non dérivable dans les points $x = 2,3,4,5$.



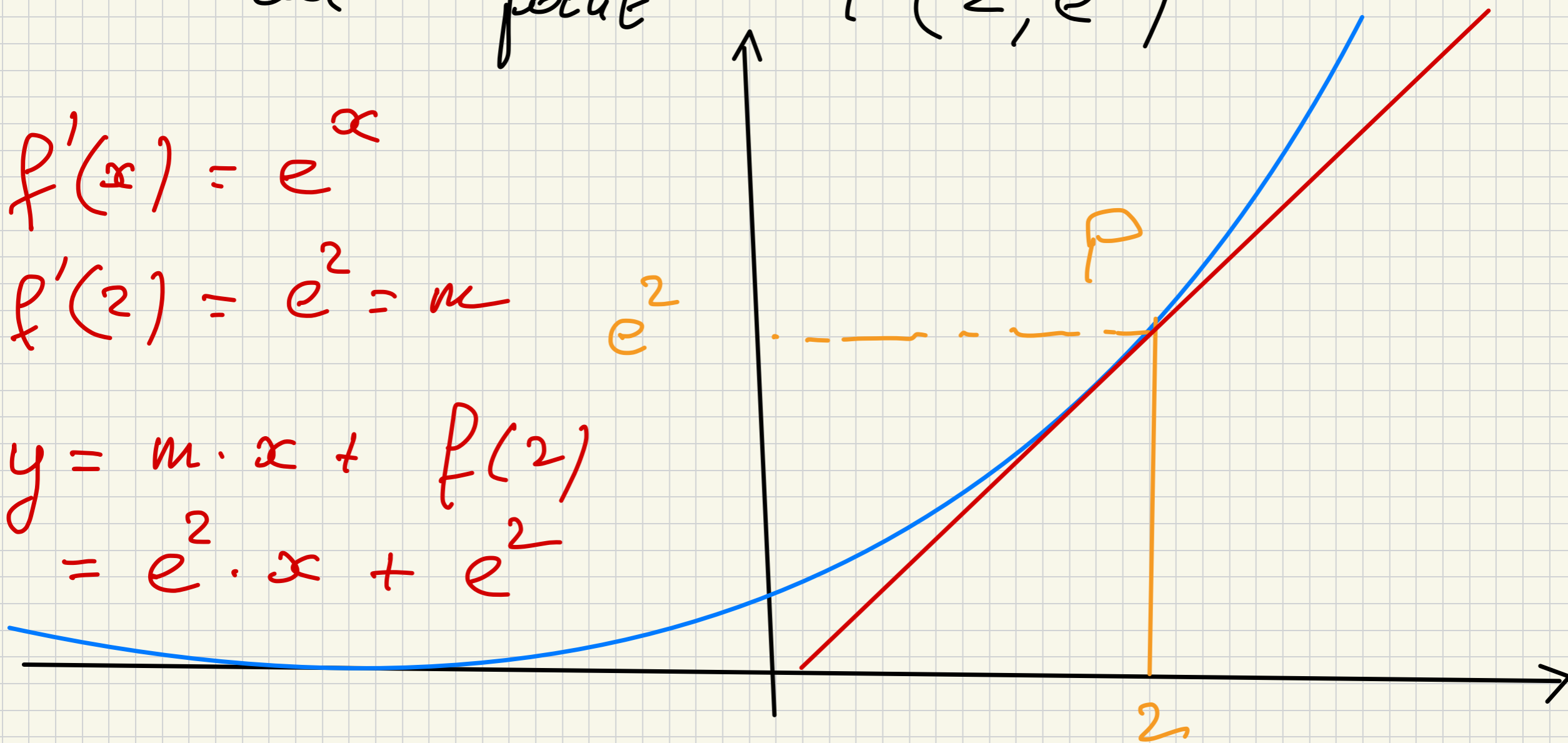
Exemple

Tangente au graphique de $f(x) = e^x$
au point $P(2, e^2)$

$$f'(x) = e^x$$

$$f'(2) = e^2 = m$$

$$y = m \cdot x + f(2)$$
$$= e^2 \cdot x + e^2$$



Règles de dérivation

Propriétés

Soient f et g deux fonctions dérivables \mathbb{R} et $a, b \in \mathbb{R}$ deux constantes réelles. Alors :

a. La dérivée est **linéaire**:

$$(af + bg)'(x) = af'(x) + bg'(x)$$

b. Dérivée d'un produit (formule de Leibniz) :

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

c. Dérivée d'un quotient :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

En posant $f = g$ dans la formule b on obtient

$$(f^2)'(x) = 2f(x)f'(x)$$

et par récurrence:

d. Dérivée d'une puissance de f :

$$(f^n)'(x) = nf^{n-1}(x)f'(x)$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

Dérivée d'une composition des fonctions

Soient $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow Z$ deux fonctions, où X, Y, Z sont des sous-ensembles de \mathbb{R} et h la fonction composée de f et de g :

$$h: X \rightarrow Z$$

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Règle de dérivation des fonctions composées (*chain rule*)

Si $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ alors

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Le terme $f'(x)$ est parfois appelé la dérivée intérieure

Exemples :

1. $f(x) = ax$ et $g(y) = e^y$ où $a \in \mathbb{R}^*$. Alors $h(x) = g(f(x)) = e^{ax}$ et

$$h'(x) = e^{ax} \cdot a = a \cdot e^{ax}$$

2. $f(x) = \sin(x)$ et $g(y) = y^n$. Alors $h(x) = g(f(x)) = (\sin(x))^n$ et

$$h'(x) = n \cdot (\sin(x))^{n-1} \cdot \cos(x)$$

$$h(x) = e^{x^2}$$

$$h'(x) = e^{x^2} \cdot 2x$$

Dérivée d'une fonction réciproque

Définition

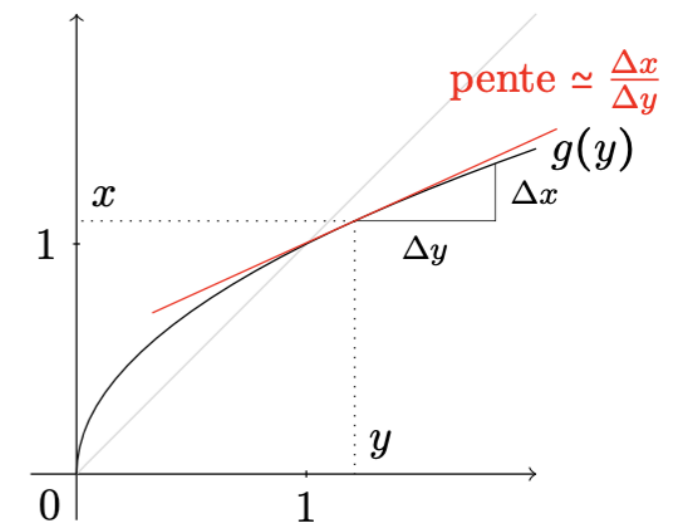
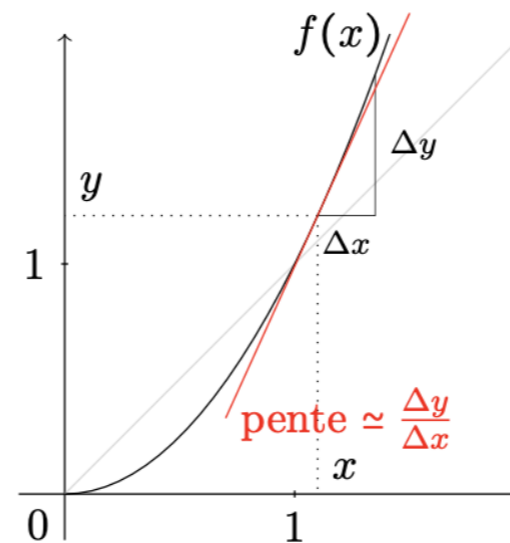
Soient X, Y deux sous-ensembles de \mathbb{R} , $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow X$ deux fonctions telles que

$$(g \circ f)(x) = x \quad \forall x \in X \quad \text{et} \quad (f \circ g)(y) = y \quad \forall y \in Y.$$

Dans ce cas on écrit $g = f^{-1}$ et on dit que g est la **fonction réciproque** de f .

Exemples :

1. $f(x) = x^n$ et $g(y) = \sqrt[n]{y}$ pour $x, y \in \mathbb{R}^+$.
2. $f(x) = \cos(x)$ et $g(y) = \arccos(y)$ pour $x \in [0, \pi[$ et $y \in]-1, 1]$.
3. $f(x) = e^x$ et $g(y) = \ln(y)$ pour $x, y \in \mathbb{R}^+$.



Règle de dérivation des fonctions réciproques

Si f est dérivable en $g(y)$, alors g est dérivable en y et

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

$$\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \end{array}$$

$$(f \circ g)(y) = y \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$f'(g(y)) \cdot g'(y) = 1$$

$$\Rightarrow g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

Dérivée de e^x et de $\ln(x)$

On a vu que la dérivée de la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ est égale à elle-même :

$$f'(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En appliquant la formule de la dérivée d'une fonction réciproque on trouve la dérivée de

$$g(y) = \ln(y)$$

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*$$

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}$$

On vient donc de démontrer que $\ln(x)$ est bien la primitive de la fonction $\frac{1}{x}$

Dérivées des fonctions trigonométriques

Les dérivées des trois principales fonctions trigonométriques sont :

$$1. (\sin(x))' = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2. (\cos(x))' = -\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$3. (\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Les dérivées des trois principales fonctions trigonométriques réciproques sont :

$$4. (\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1,1[$$

$$5. (\arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1,1[$$

$$6. (\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sin(x) \quad f'(x) = \cos(x)$$

$$g(y) = \arcsin(y)$$

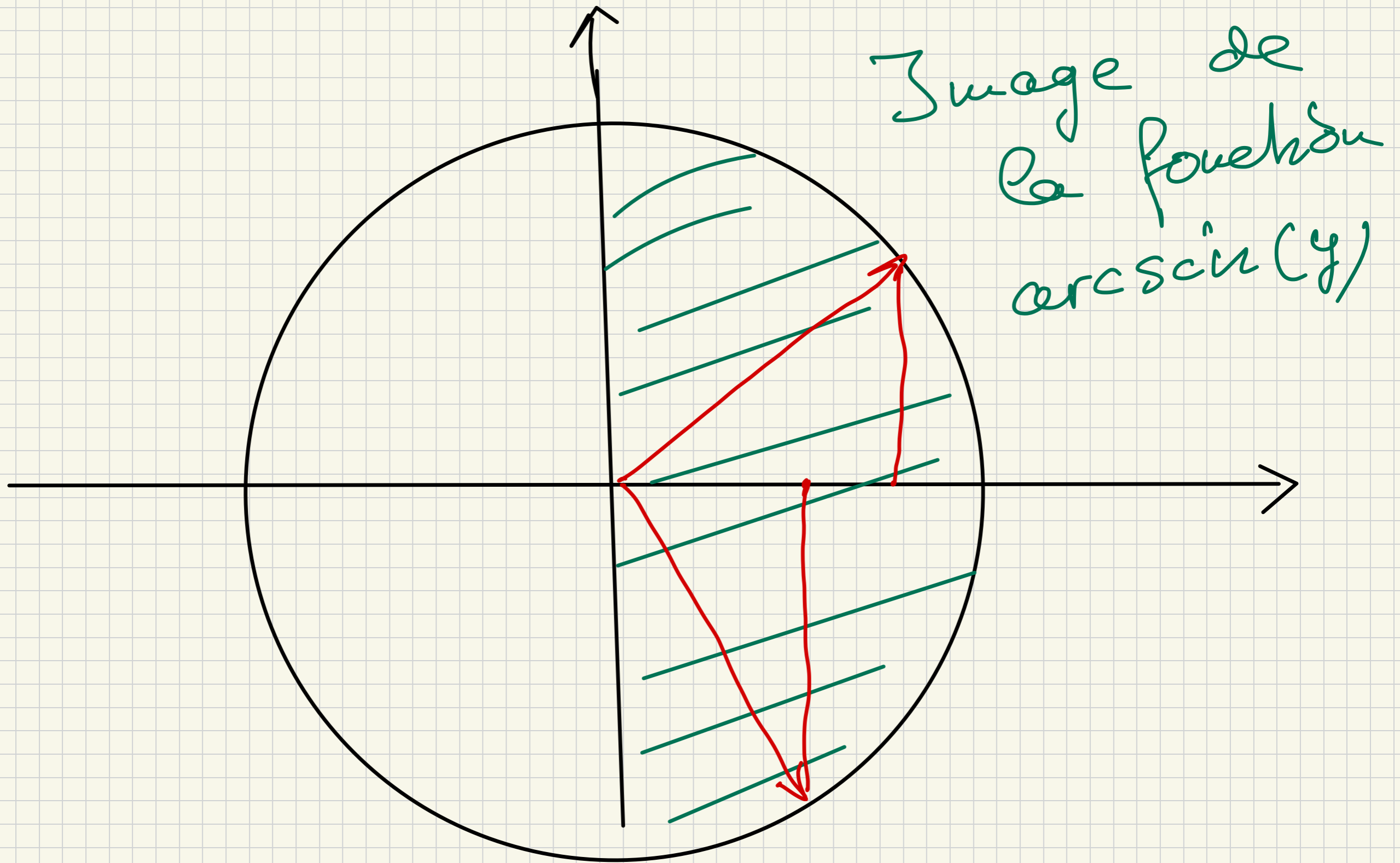
$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))}$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}$$

$$\underbrace{\cos(\arcsin(y))}_{\alpha} = \pm \sqrt{1 - \underbrace{\sin^2(\arcsin(y))}_{y^2}}$$

$$= \pm \sqrt{1 - y^2}$$



$$\cos(\arcsin(x)) \text{ is } \geq 0$$

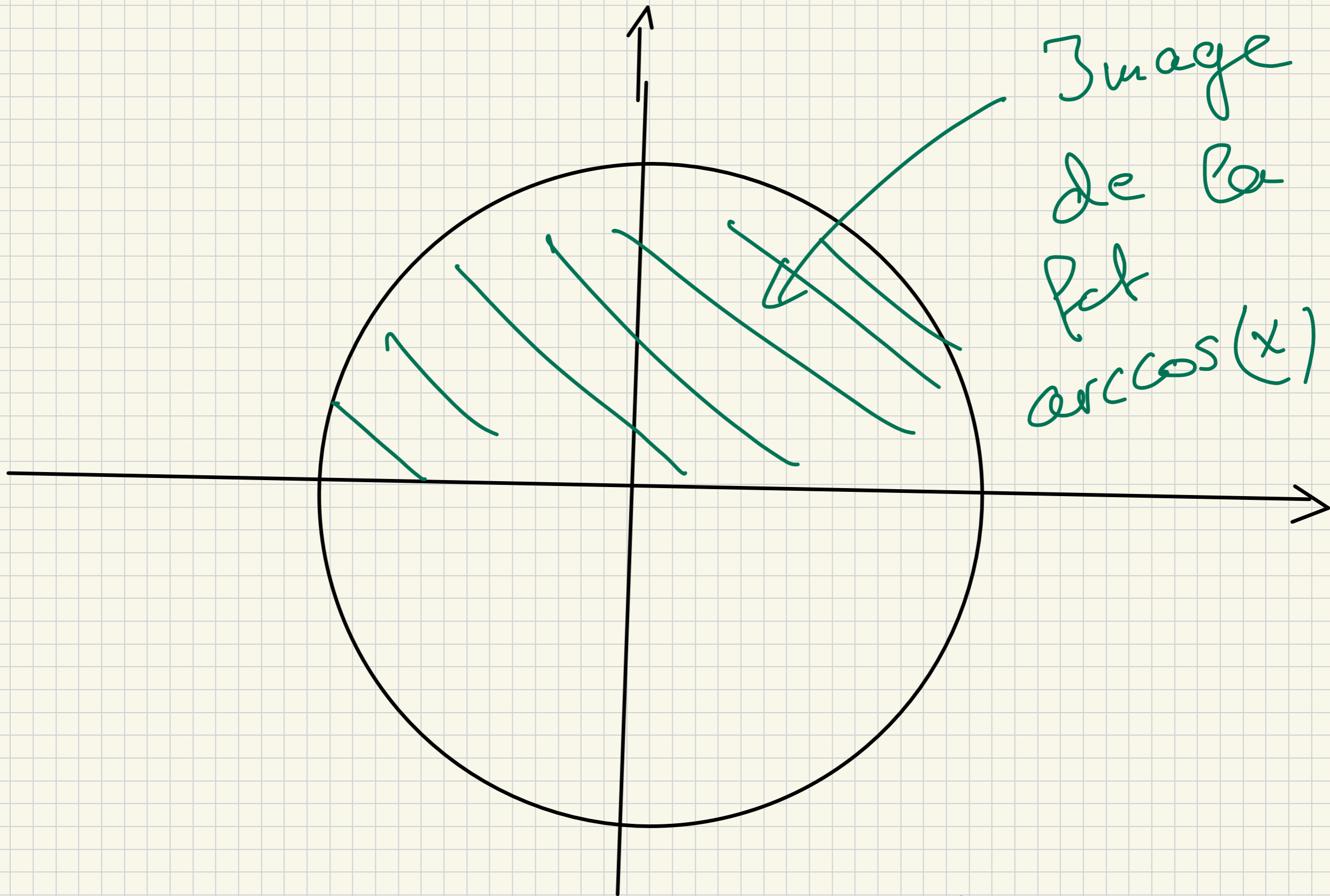


Image
de P_a
 P_a
 $\arccos(x)$

$\sin(\arccos(x))$ est ≥ 0

Dérivée des fonctions hyperboliques

La dérivée de la fonction sinus hyperbolique est égale au cosinus hyperbolique :

$$(\sinh(x))' = \cosh(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La dérivée de la fonction cosinus hyperbolique est égale au sinus hyperbolique :

$$(\cosh(x))' = \sinh(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La dérivée de la fonction tangente hyperbolique est égale à l'inverse du carré du cosinus hyperbolique :

$$(\tanh(x))' = \frac{1}{\cosh^2(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ces formules sont très similaires à celles des dérivées des fonctions trigonométriques à ceci près qu'elles sont symétriques pour le sinh et le cosh. Il n'y a pas ici le problème de savoir où est le signe (-) !!

Ce que l'on gagne ici en simplicité, on l'a perdu dans la relation

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

qui est le pendant de la formule

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$f(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})'$$

$$= \frac{1}{2} [(e^x)' - (e^{-x})']$$

$$= \frac{1}{2} [e^x - e^{-x} \cdot (-x)']$$

$$= \frac{1}{2} [e^x - e^{-x} \cdot (-1)]$$

$$= \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \cosh(x)$$

$\sinh(x)$

Dérivées de quelques fonctions

La dérivée de la fonction exponentielle $f(x) = a^x$ ($a > 0$). On met f sous la forme $f(x) = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$

$$f'(x) = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dérivée de la fonction $f(x) = x^q$ avec $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$

Alors $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ est équivalent à

$$[f(x)]^n = x^m$$

En dérivant des 2 côtés on obtient:

$$n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x) = mx^{m-1}$$

ce qui donne

$$f'(x) = \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{m-1}}{f(x)^{n-1}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{m-1}}{(x^q)^{n-1}} = q \cdot \frac{x^{m-1}}{x^{m-m/n}} = q \cdot x^{m-1-m+q} = q \cdot x^{\frac{m}{n}-1} = q \cdot x^{q-1}$$

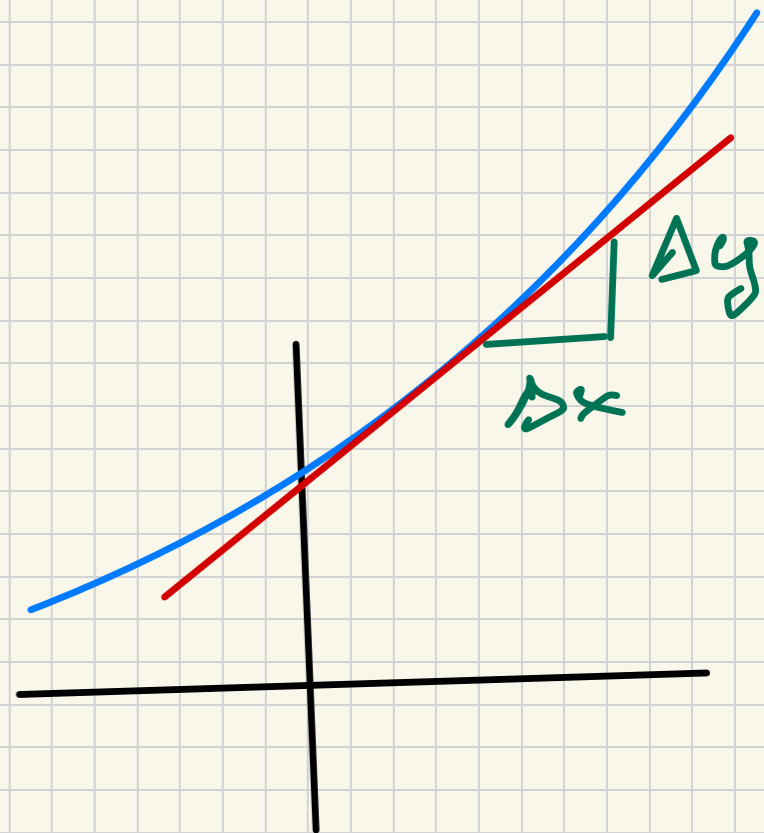
$$\underline{y = f(x)}$$

Diverses
notations de
la dérivée

$$f'(x_0)$$
$$\frac{d}{dx} f(x_0)$$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$$



$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

$$(a^x)' = \left(e^{\ln a \cdot x} \right)' = \left(e^{x \ln a} \right)'$$

$$e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a$$

$$\begin{aligned} \underbrace{(x^\alpha)'}_{\alpha \in \mathbb{R}} &= \left(\left(e^{\ln(x) \cdot \alpha} \right)' \right) = \left(e^{\alpha \ln(x)} \right)' \\ &= e^{\alpha \ln(x)} \cdot [\alpha \ln(x)]' = e^{\alpha \ln(x)} \cdot \frac{\alpha}{x} \\ &= x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \underline{\underline{\alpha \cdot x^{\alpha-1}}} \end{aligned}$$

Dérivées de quelques fonctions

Dérivée de la fonction

$$f(x) = x^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad x > 0$$

On met f sous la forme $f(x) = (e^{\ln x})^\alpha = e^{\alpha \ln x}$

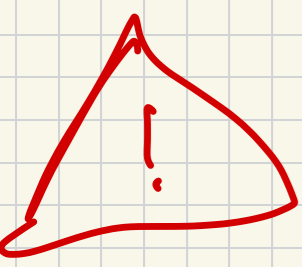
Alors

$$f'(x) = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot \left(\frac{\alpha}{x}\right) = x^\alpha \cdot \left(\frac{\alpha}{x}\right) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

Plus généralement

$$[f(x)^\alpha]' = \alpha \cdot [f(x)]^{\alpha-1} \cdot \underline{\underline{f'(x)}}$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0$


$$\begin{aligned} (3^x)' &= 3^x \cdot \ln(3) && \text{rct exponentielle !!} \\ (x^\pi)' &= \pi \cdot x^{\pi-1} && \text{rct puissance !!} \end{aligned}$$

$$f(x) = x^x$$

exercices !

$$\begin{aligned} &(g(f(x)))' \\ &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \end{aligned}$$

h h'

b) e^f

c) $\ln(f)$

d) f^α $\alpha \in \mathbb{R}$

e) $\sin(f)$

f) $\cos(f)$

$$e^f \cdot f'$$

$$\alpha \cdot f^{\alpha-1} \cdot f'$$

$$\cos(f) \cdot f'$$

$$- \sin(f) \cdot f'$$

Exercice Calculer la dérivée de

$$f(x) = \frac{1}{\sin^3(x)} = [\sin(x)]^{-3} \quad f^\alpha$$

$\alpha = -3$

(d.) $f'(x) = (-3) [\sin(x)]^{-4} \cdot \cos(x)$

$$= \frac{-3 \cos(x)}{\sin^4(x)}$$

$$\left(\frac{1}{f^n} \right)' = \frac{-n \cdot f'}{f^{n+1}}$$

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$$

$$\Rightarrow (f^n)' = n \cdot f^{n-1} \cdot f' \quad (d)$$

$$h(x) = e^{x^3 + 2x^2}$$

$$g(y) = e^y$$

$$f(x) = x^3 + 2x^2$$

$$h'(x) = \underbrace{e^{x^3 + 2x^2}}_{g'(f(x))} \cdot \underbrace{(3x^2 + 4x)}_{f'(x)}$$

$$h = g \circ f$$

Règle de l'Hospital

Pour lever une indétermination dans une limite **du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$** on peut utiliser la **règle de l'Hospital** qui dit que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si la seconde limite existe !

Exemples:

1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{nx^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} x^{-n} = 0 \text{ pour tout } n > 0$$

3)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{e^x} = 0$$

3 bis)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

$$n = 10^6$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

Exemples Hospital.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0}$$

$$\frac{\cos x - 1}{x^2}$$

$\stackrel{=}{\uparrow}$
Hosp.

$$\lim_{x \rightarrow 0}$$

$$\frac{-\sin x}{2x}$$

$\rightarrow 1$
 $x \rightarrow 0$

$\stackrel{=}{\parallel}$
Hosp.

$$\lim_{x \rightarrow 0}$$

$$\frac{-\cos x}{2}$$

$\stackrel{=}{\parallel}$

$$-\frac{1}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty}$$

$$\frac{(\ln x)^4}{x^3}$$

$\stackrel{=}{\parallel}$
Hosp.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty}$$

$$\frac{4 \cdot (\ln x)^3 \cdot \frac{1}{x}}{3x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty}$$

$$\frac{4(\ln x)^3}{3x^3}$$

$\stackrel{=}{\parallel}$
Hosp.

$$\lim_{x \rightarrow \infty}$$

$$\frac{12(\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x}}{9x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12 (\ln x)^2}{9x^3} \stackrel{\text{Hosp.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{24 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{27x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{24 \ln x}{27x^3} \stackrel{\text{Hosp.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{24}{x}}{81x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{24}{81x^3} \Rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$$

$\forall \alpha$
 $\forall \beta > 0$

\Rightarrow

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} x (\ln x)^2$$

" 0 · ∞ "

$\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x}}$$

Hosp

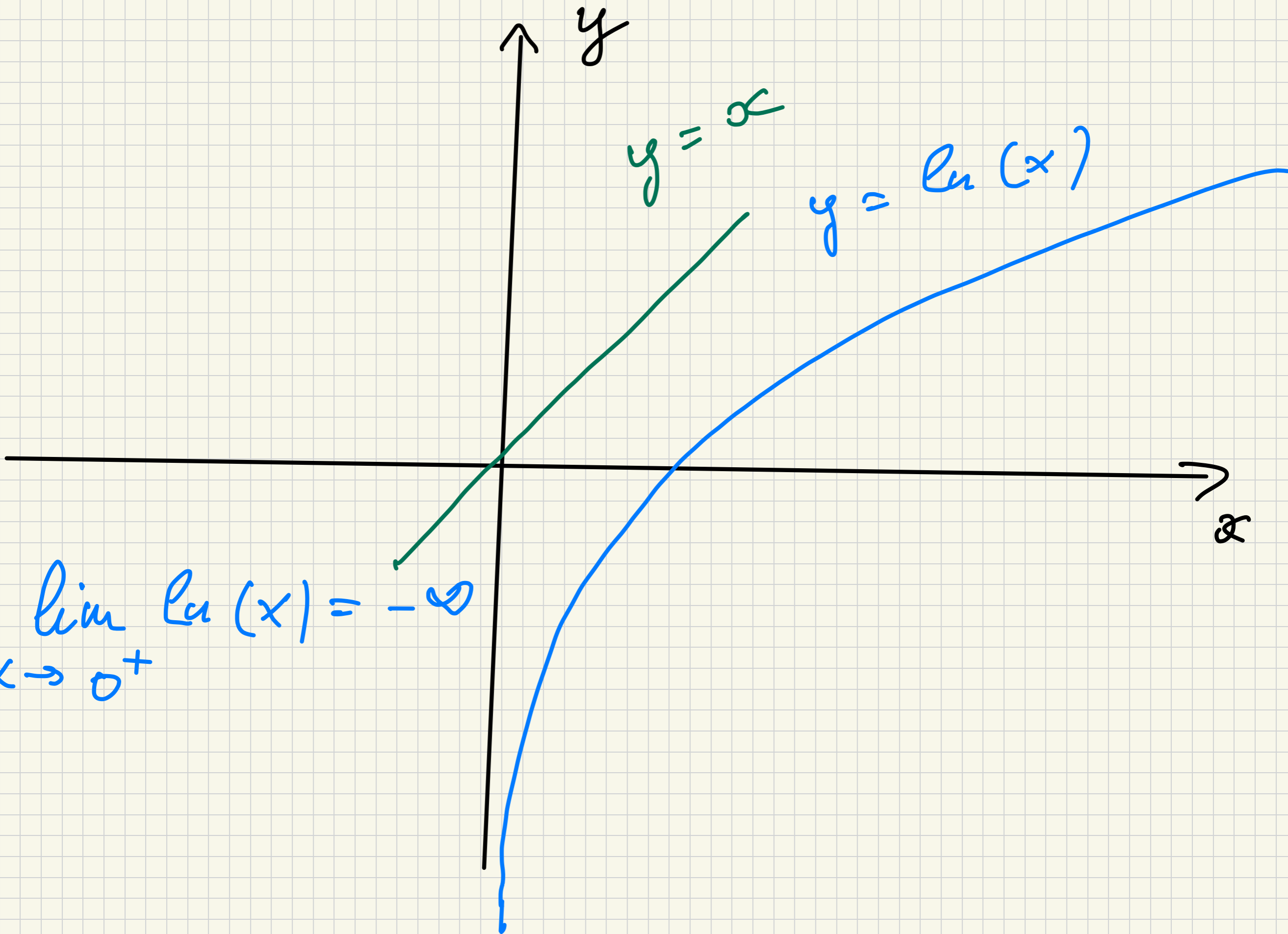
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln x}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$(f^\alpha)' = \alpha \cdot f^{\alpha-1} \cdot f' \Rightarrow \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\hookrightarrow ((\ln x)^2)' = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

Formule (d)
avec $\alpha = -1$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2/x}{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x (\ln x)^2$$

"0 · ∞ "

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(\ln x)^{-2}}$$

" $\frac{0}{0}$ "

$$\stackrel{\text{Hosp.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{-2 (\ln x)^{-3} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{(\ln x)^{-3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -x \cdot (\ln x)^3$$

Aucun progrès !!

Il faut bien choisir le terme à inverser et mettre au dénominateur

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \quad \forall \alpha$$

$$\forall \beta > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{a^x} = 0 \quad \forall \beta$$

$\forall a > 1$
pour que a^x

soit
croissante

$$(\ln x)^\alpha \ll x^\beta \ll a^x$$

$x \rightarrow +\infty$

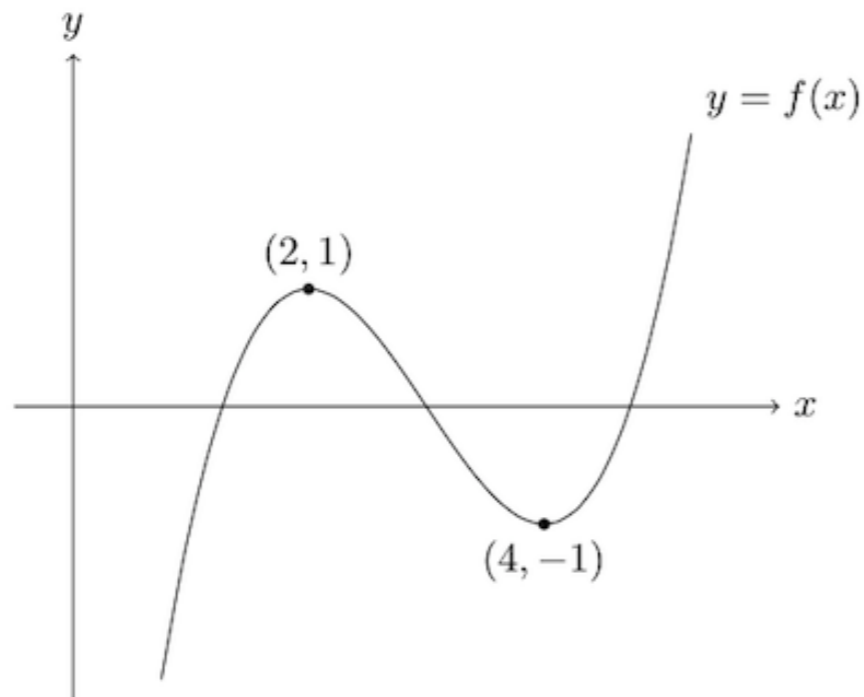
$a > 1$

Dérivée et monotonie

Fonction croissante ou décroissante ?

La dérivée de la fonction continue $f(x)$ donne la pente de la tangente à la courbe représentée par l'expression $y = f(x)$. Étant donné un intervalle $]a, b[\subset \mathbb{R}$ nous déclarons que :

1. Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est **croissante** sur $]a, b[$.
2. Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est **décroissante** sur $]a, b[$.
3. Si $f'(x_0) = 0$ alors f a un **point stationnaire** en x_0 .



Exemple :

$$f'(x) > 0 \text{ dans l'intervalle }]-\infty, 2[$$

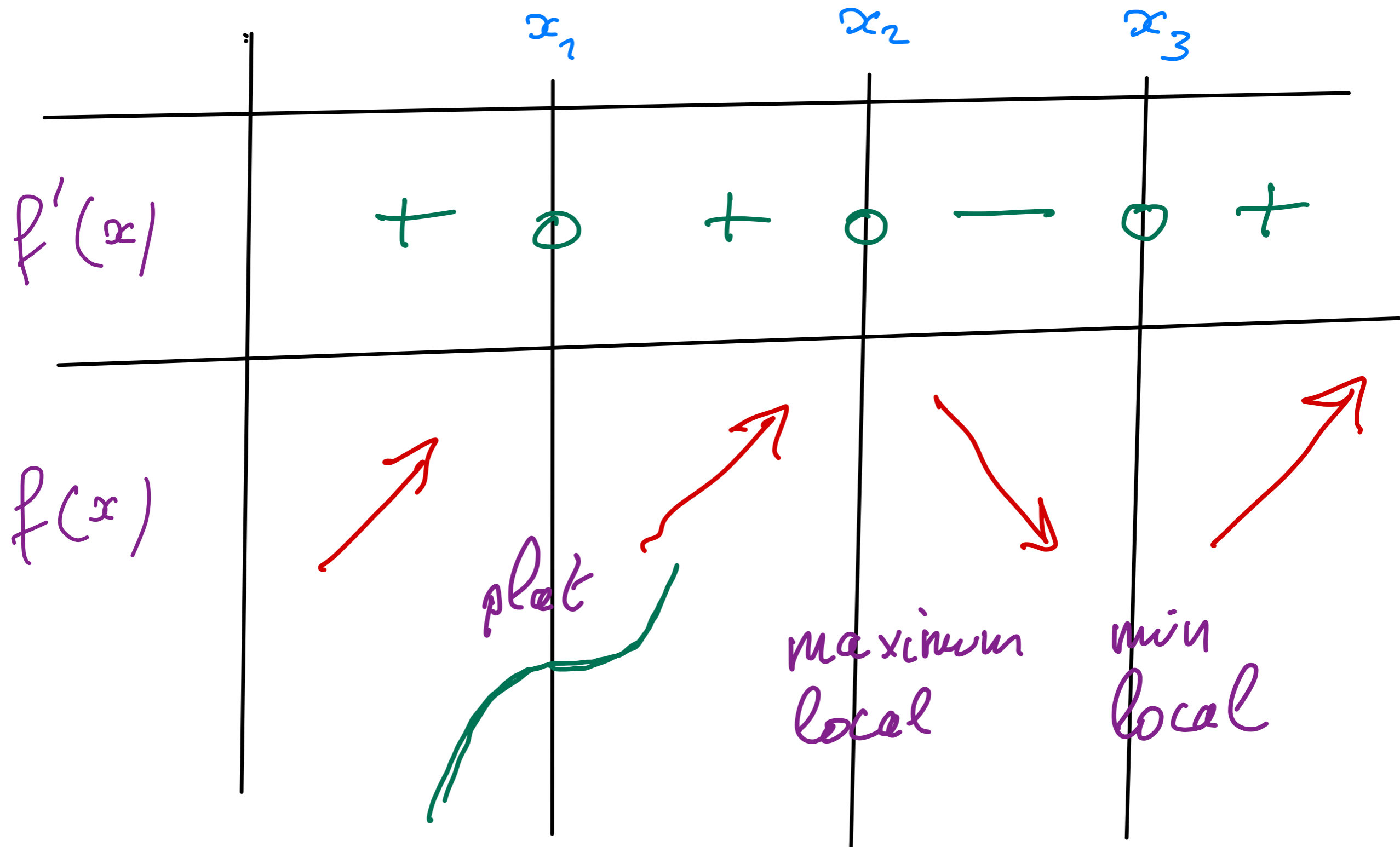
$$f'(x) = 0 \text{ en } x = 2$$

$$f'(x) < 0 \text{ dans l'intervalle }]2, 4[$$

$$f'(x) = 0 \text{ en } x = 4$$

$$f'(x) > 0 \text{ dans l'intervalle }]4, +\infty[$$

Tableau de croissance d'une fonction



Limite indéterminées

Les limites de la forme suivante sont *a priori* indéterminées.

A. $\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$ $0 \cdot \infty$ \rightsquigarrow $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$

B. ∞^0 1^∞ 0^0

C. $\infty - \infty$ $-\infty + \infty$

Il faut lever l'indétermination par une méthode ou une autre.

- Pour le type A nous utiliserons la **règle de l'Hôpital** ou les **développements limités**.
- Pour le type B, nous appliquerons **la fonction \ln** à l'expression ce qui nous ramène à une forme de type A (voir slide 31)
- Le type C se résout souvent en multipliant l'expression par le «conjugué» (voir slide 32).

Limite de type B

Pour résoudre une limite indéterminée de la forme suivante

$$\infty^0$$

$$1^\infty$$

$$0^0$$

on procède en 3 étapes:

1. On applique la **fonction \ln** à l'expression ce qui nous ramène à une **indétermination de type A**.
2. On lève l'indétermination de type A à l'aide de la **règle de l'Hospital** ou **d'un développement limité** : on trouve une limite L
3. On **reprend l'exponentielle** pour trouver la limite e^L

Exemple: $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = ?$ $A(x) = x^x$ 0^0

$$1. \ln A(x) = \ln(x^x) = x \cdot \ln(x) = \frac{\ln(x)}{1/x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{1/x} \stackrel{\text{Hosp.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} =$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} - \frac{x^2/x}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(A(x)) = 0$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 0} A(x) = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$$

$\hookrightarrow e^x$

Example 2 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(x))^{2/x} = ?$ "1[∞]"

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{q}{n}\right)^n = e^q$

1. $\ln[A(x)] = \ln\left[(1 + \sin(x))^{2/x}\right]$
 $= \frac{2}{x} \cdot \ln(1 + \sin(x)) = \frac{2 \ln(1 + \sin(x))}{x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln A(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1 + \sin(x))}{x}$

Hosp. $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x)}{(1 + \sin(x)) \cdot 1} = 2$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} A(x) = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln(A(x))}$$

$$= e^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \sin(x)\right)^{2/x}$$

$$\left(1 + \sin(x)\right)^{2/x} \approx \left(1 + x\right)^{2/x} \quad x \rightarrow 0$$

$$y = \frac{1}{x} \approx \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{2y} \xrightarrow{y \rightarrow \infty} e^2$$

Indétermination de type C

Calculer

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3x + 5} - x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3x + 5} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x + 5} - x)(\sqrt{x^2 + 3x + 5} + x)}{\sqrt{x^2 + 3x + 5} + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x + 5} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 5}{\sqrt{x^2 + 3x + 5} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \left(3 + \frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2 \cdot \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right)} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \left(3 + \frac{5}{x}\right)}{|x| \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right)} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \left(3 + \frac{5}{x}\right)}{x \cdot \left[\sqrt{\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right)} + 1\right]} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{5}{x}}{\sqrt{\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right)} + 1} = \frac{3}{2}$$

Example: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 5x} - x = ?$ "∞ - ∞"

$$\begin{array}{c} \infty \quad - \quad \infty \\ \sqrt{x^2 + 5x} - x = \sqrt{x^2 + 5x} - x \cdot \frac{\overbrace{\sqrt{x^2 + 5x} + x}^A + B}{\underbrace{\sqrt{x^2 + 5x} + x}^A + B} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \overbrace{x^2}^{A^2} + 5x - \overbrace{x^2}^{B^2} \\ \hline x^2 + 5x - x^2 \end{array} = \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 5x} + x}$$

$$\begin{array}{c} \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 5x} + x} \\ \hline \frac{5x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{5}{x}\right) + x}} \end{array} = \frac{5x}{|x| \sqrt{1 + \frac{5}{x}} + x}$$

$$\frac{5x}{|x| \sqrt{1 + \frac{5}{x}} + x}$$

Or $x \rightarrow +\infty$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

hence $|x| = x$

$$\frac{5x}{x \sqrt{1 + \frac{5}{x}} + x}$$

"

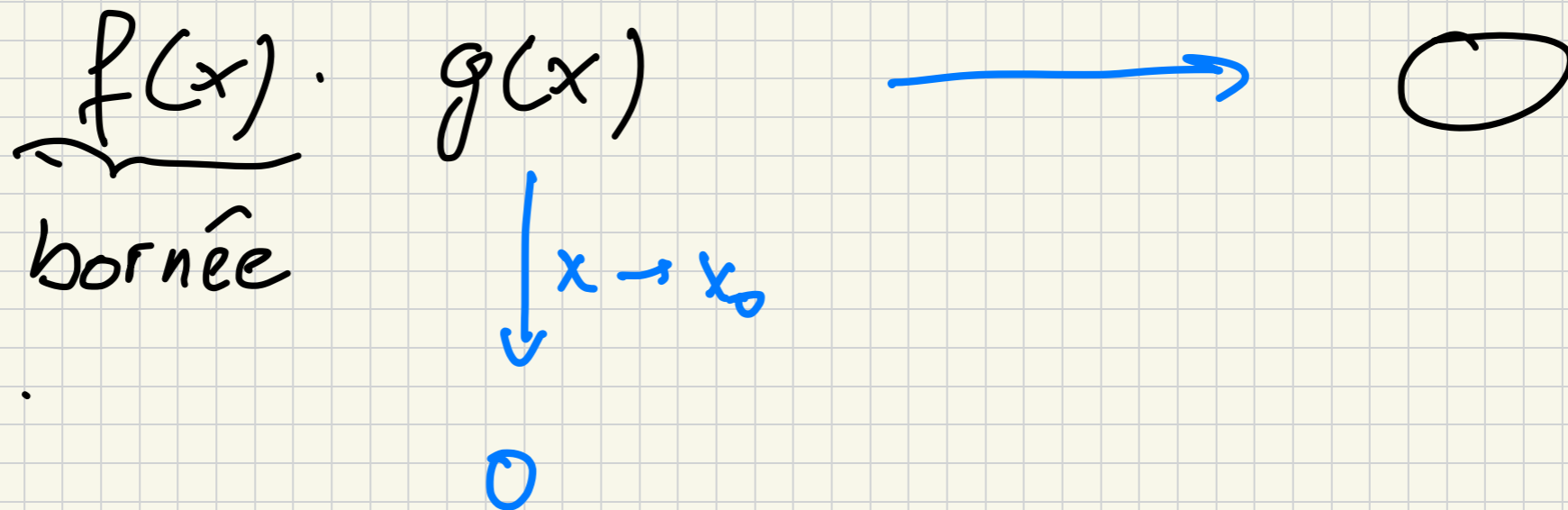
$$\frac{5\cancel{x}}{\cancel{x} \left[\sqrt{1 + \frac{5}{x}} + 1 \right]}$$

$x \rightarrow +\infty$

$$\frac{5}{2}$$

$\downarrow x \rightarrow +\infty$

Théorème



$$0 \cdot \text{borné} = 0$$

Ex

$$\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{2x^2}_{\downarrow 0} \cdot \underbrace{\cos(e^{x^2 + 3x})}_{\text{borné}} = 0$$