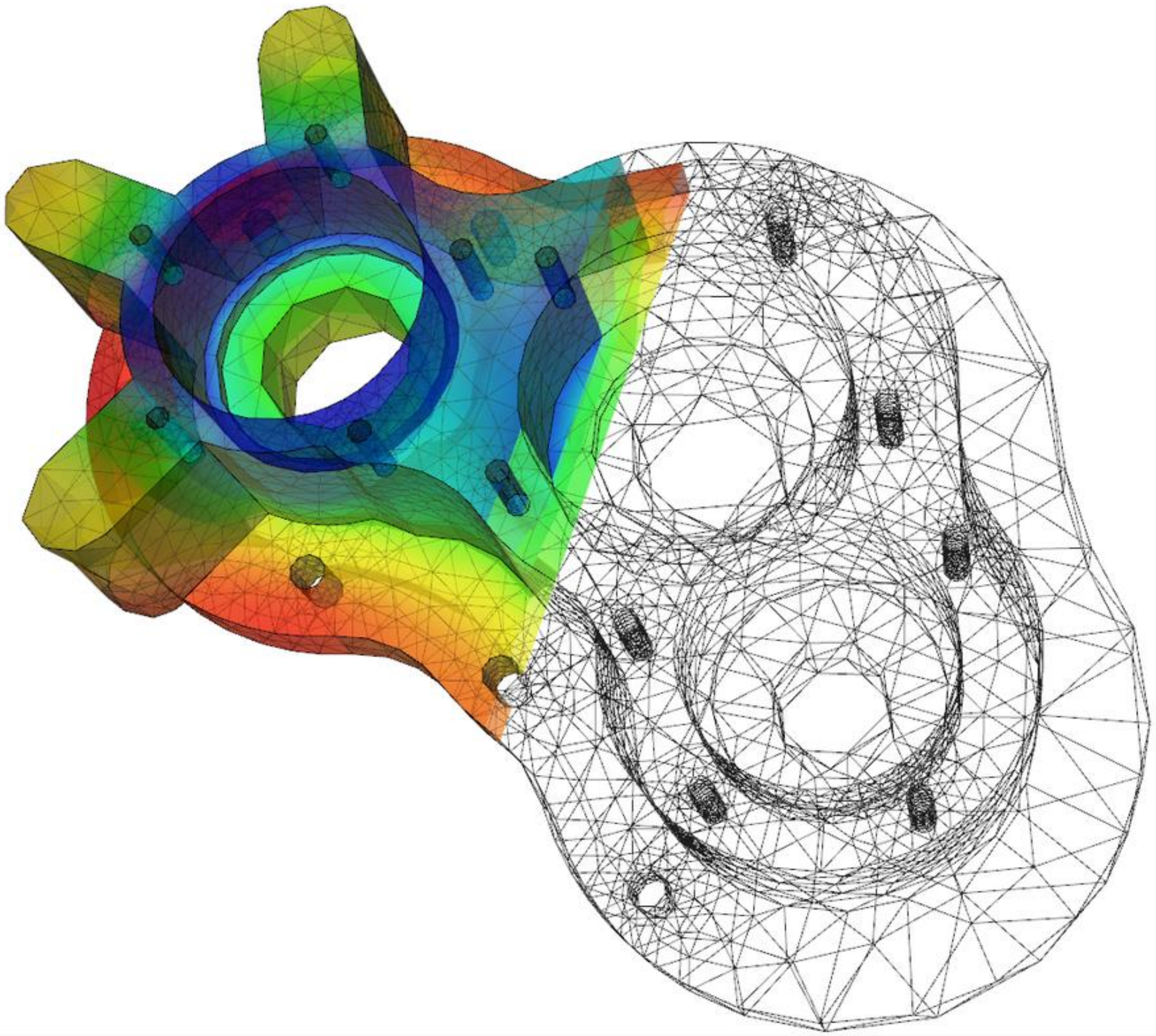


Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Fonctions et polynômes

Philippe Chabloz

Fonctions réelles d'une variable réelle

Fonction provient du latin *functio*, qui signifie accomplissement, exécution. Ce terme apparaît au XVIIe siècle sous la plume de Jean Bernoulli dans une lettre à son ami Gottfried Leibnitz.

Définition : Soient A et B deux ensembles. Une *fonction* de A à B attribue à chaque élément de A exactement un élément de B. Nous utiliserons la notation :

$$\begin{aligned} f: A &\to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

L'ensemble A est appelé *domaine de la fonction* et l'ensemble B est appelé *codomaine de la fonction*.

Soit $\boldsymbol{b = f(a)}$. Alors
b est appelé **l'image de a par f**
a est la **pré-image de b par f**

ou antécédent

Expressions de la fonction

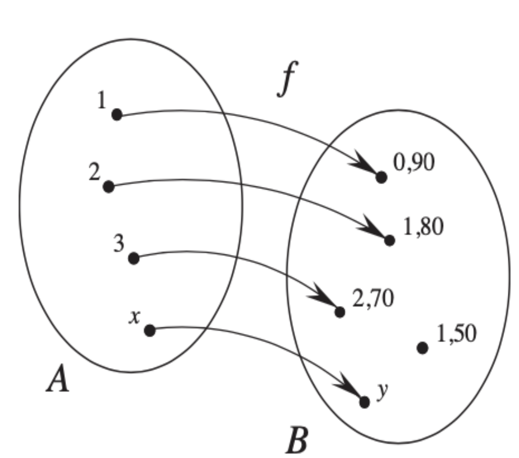
$$\begin{aligned} f: A &\to B \\ x &\mapsto 0{,}9x \end{aligned}$$

ou $f(x) = 0{,}9x$

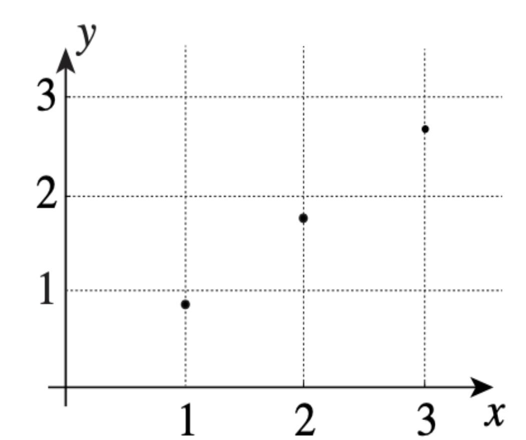
Tableau de valeurs

x	$f(x)$
0	0
1	0,9
2	1,8
3	2,7

Diagramme sagittal



Le graphique



Fonctions réelles d'une variable réelle

Soit f und fonction de domaine et A et de codomaine B

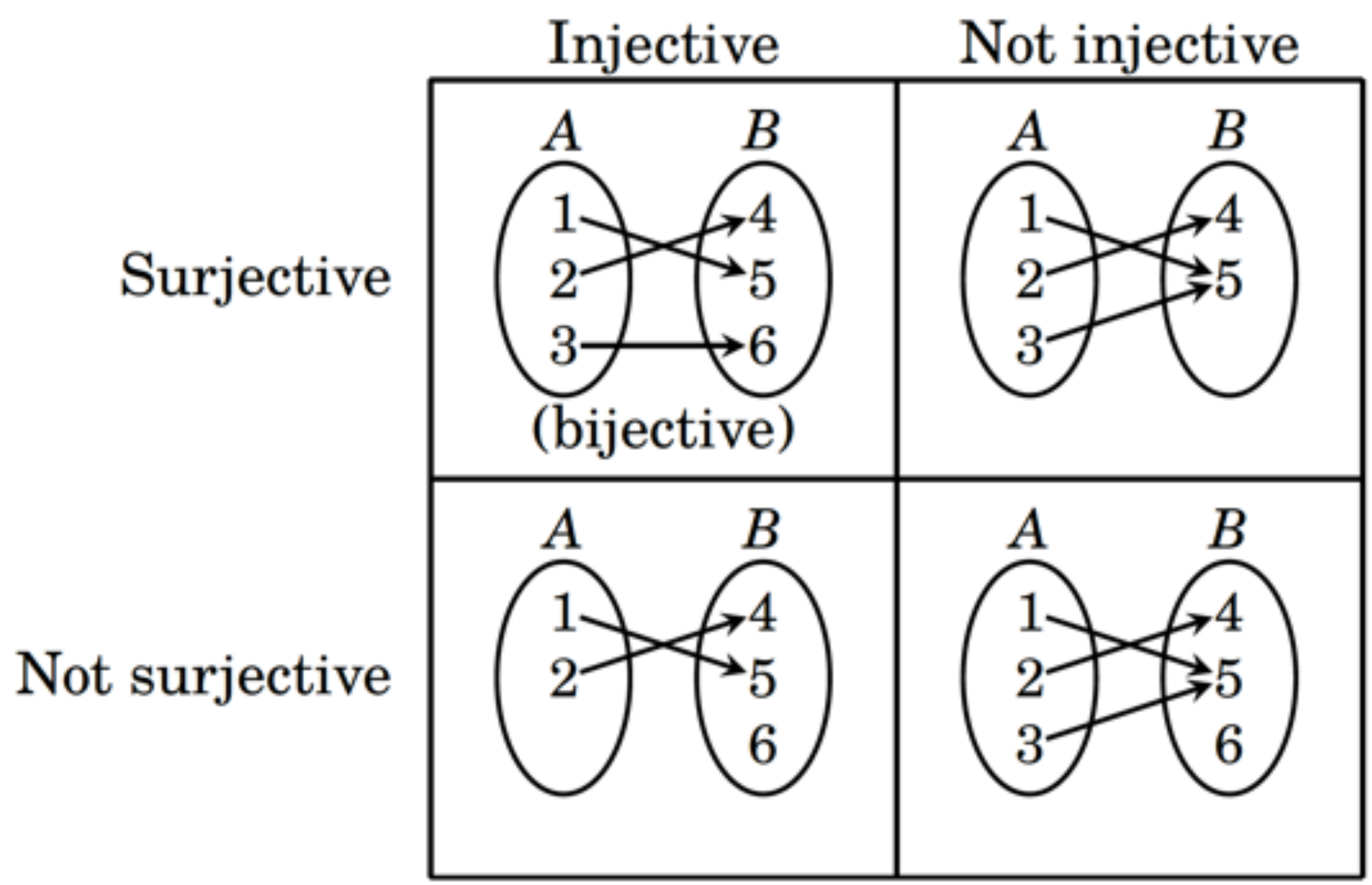
$$\begin{aligned} f: A &\to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Définitions :

On dit que f est ***injective*** si tout élément b de B a ***au plus une pré-image***

On dit que f est ***surjective*** si tout élément b de B a **au moins une pré-image**

Si f est ***injective et surjective***, on dit qu'elle est ***bijective.***



Si $a \neq b$ alors $f(a) \neq f(b)$

injectif = 0 ou 1 pré-image

Surjectif = 1 ou plus pré-image(s)

pour tout $b \in A$ $\exists a \in A$ t.q $f(a) = b$

$\Downarrow$

bijectif = injectif ET surjectif

= 1 et 1 seule pré-image

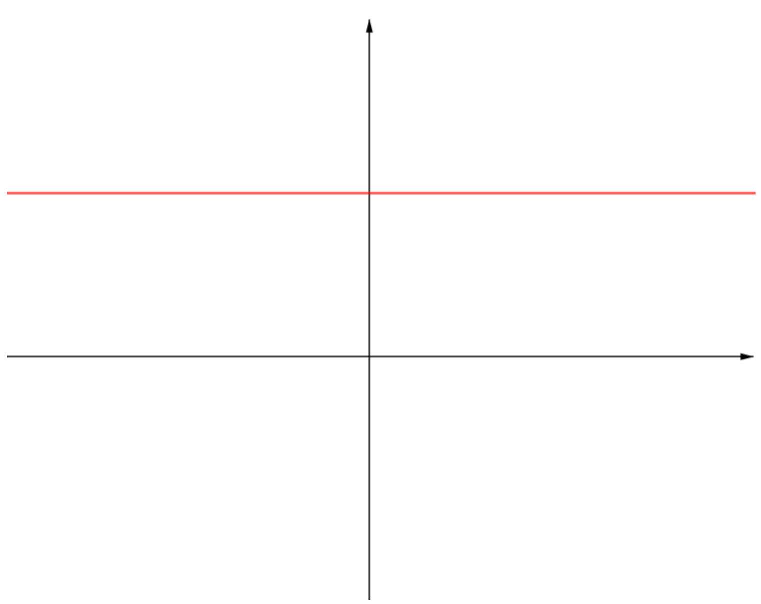
Fonctions du premier degré

pas linéaire !!

Fonctions constantes

$$f(x) = c \text{ où } c \in \mathbb{R}$$

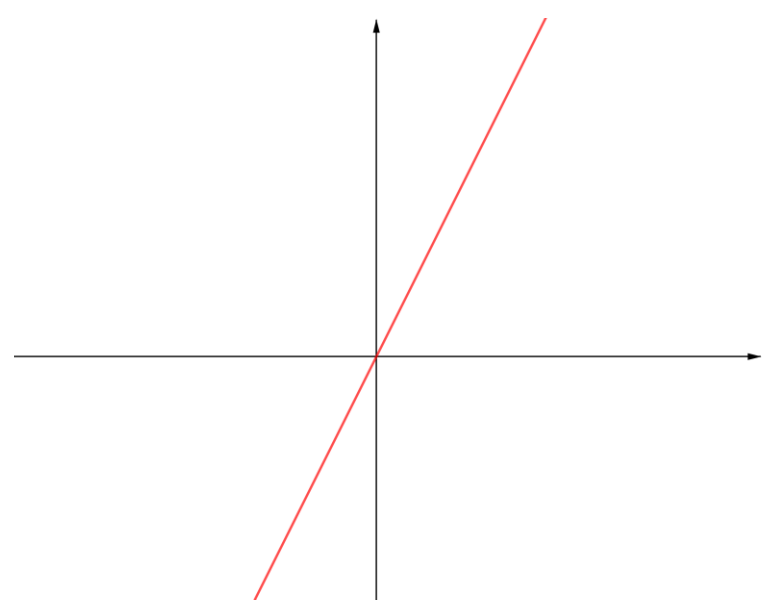
Le graphe représentatif est une droite horizontale.



Fonctions linéaires

$$f(x) = ax \text{ où } a \in \mathbb{R}^*$$

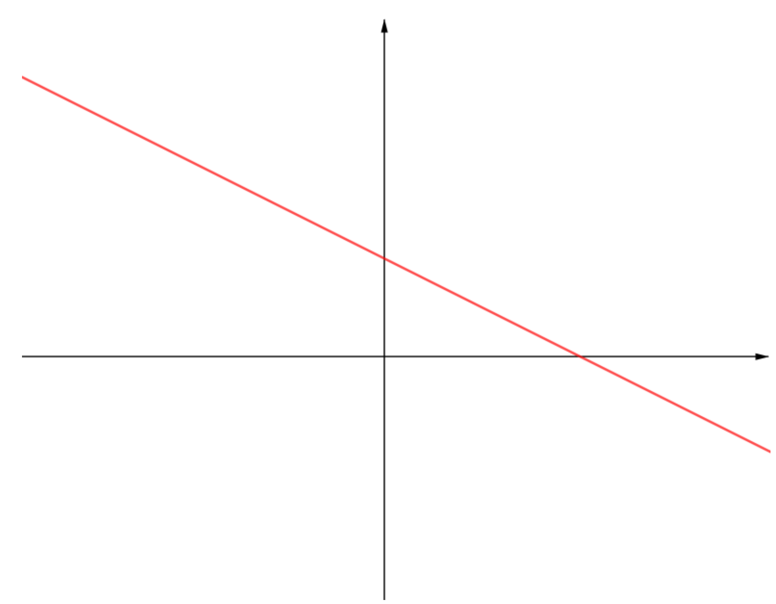
Le graphe représentatif est une droite qui passe par l'origine.



Fonctions affines

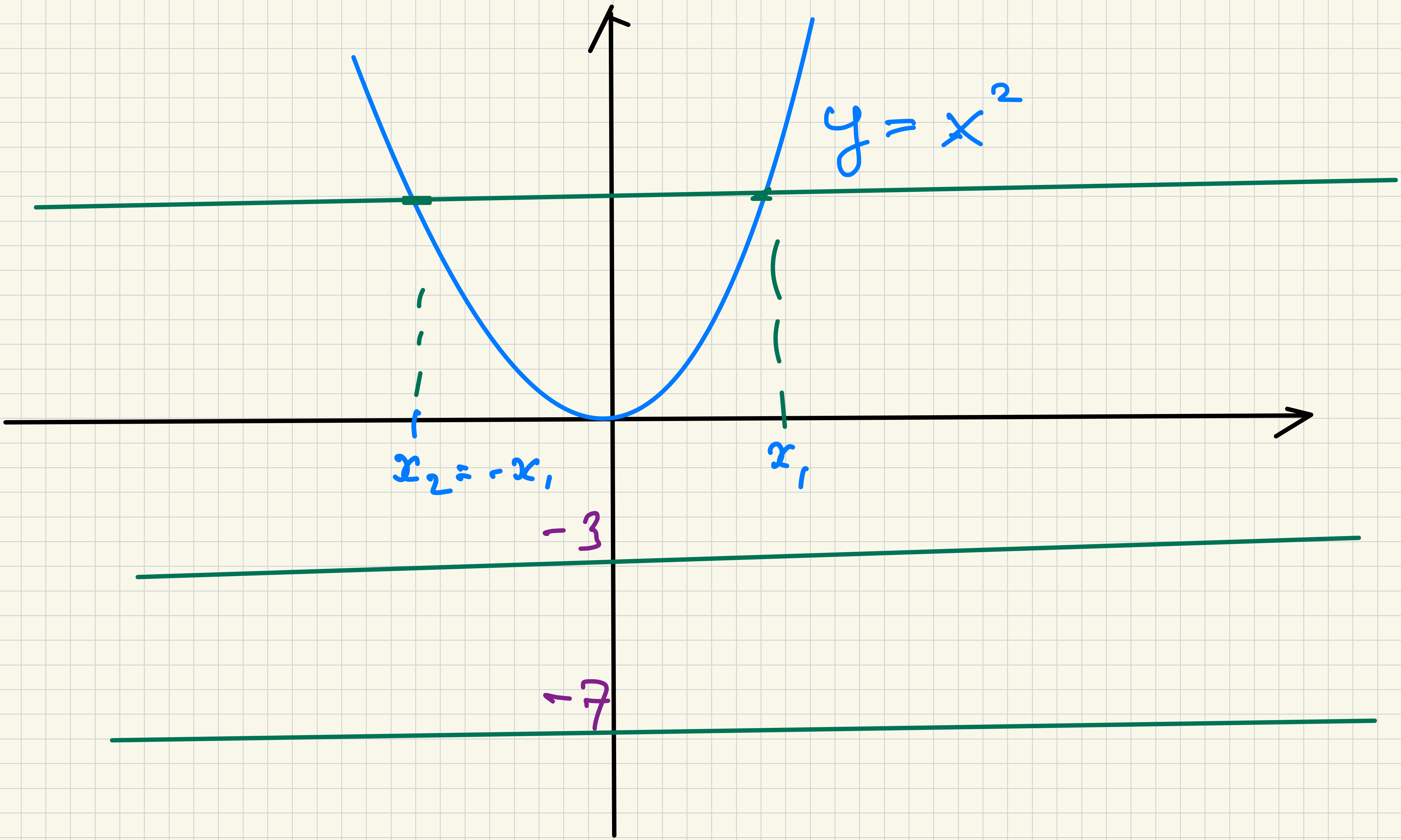
$$f(x) = ax + b \text{ où } a, b \in \mathbb{R}^*$$

Le graphe représentatif est une droite qui ne passe pas par l'origine.



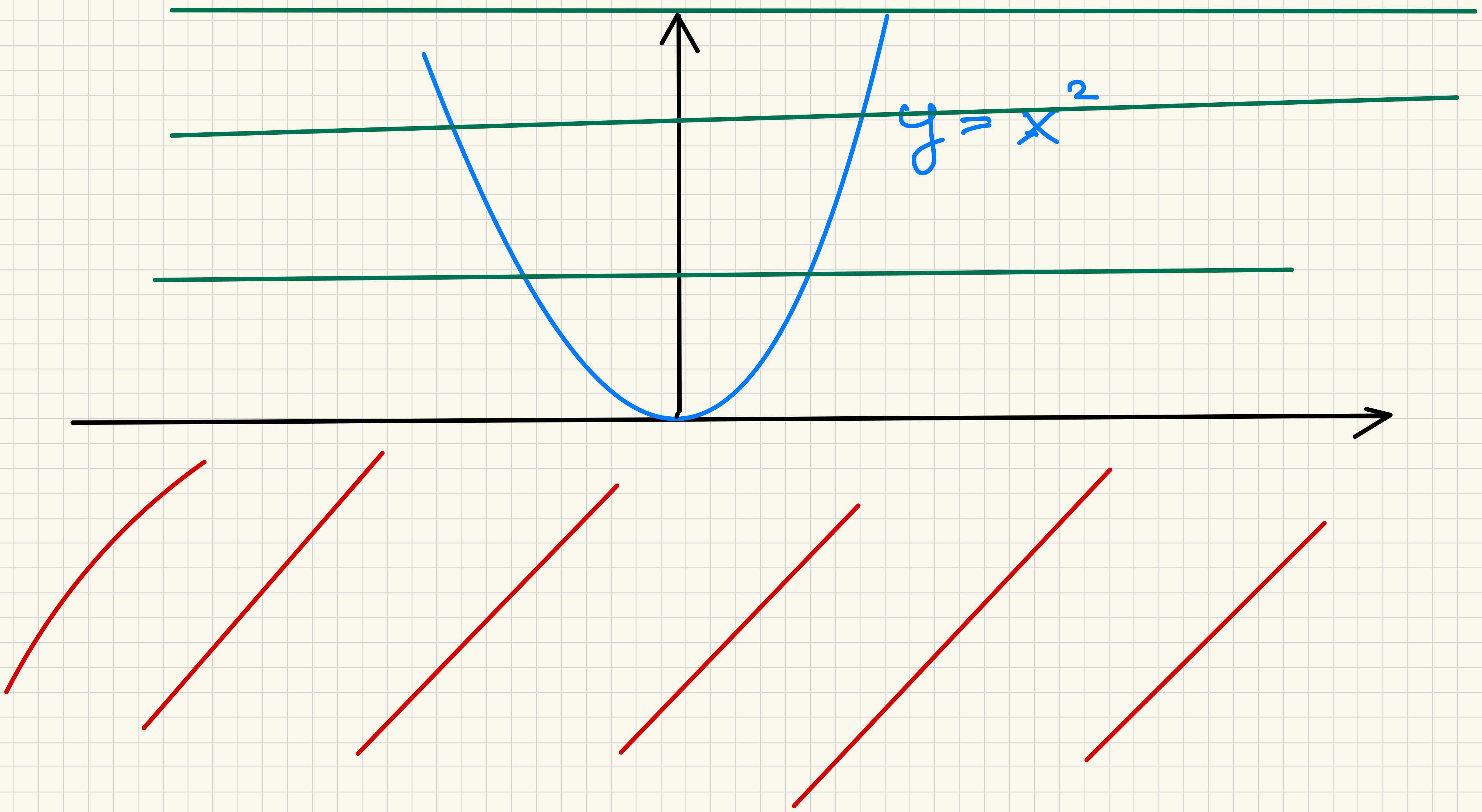
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = f(x) = x^2$$

ni injective
ni surjective



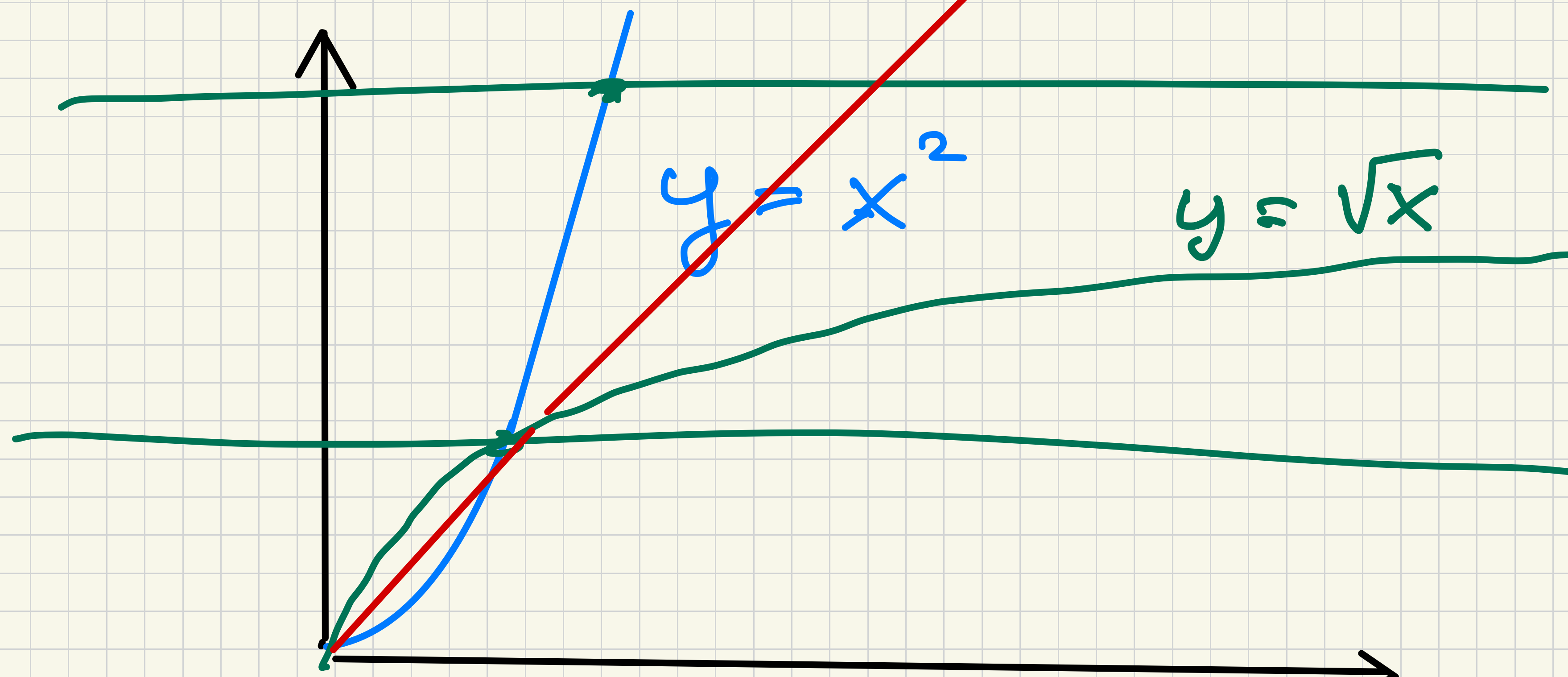
$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$x \longmapsto y = f(x) = x^2$$

Surjective
pas injective



$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$x \longmapsto y = f(x) = x^2$$

injective ET surjective = bijective

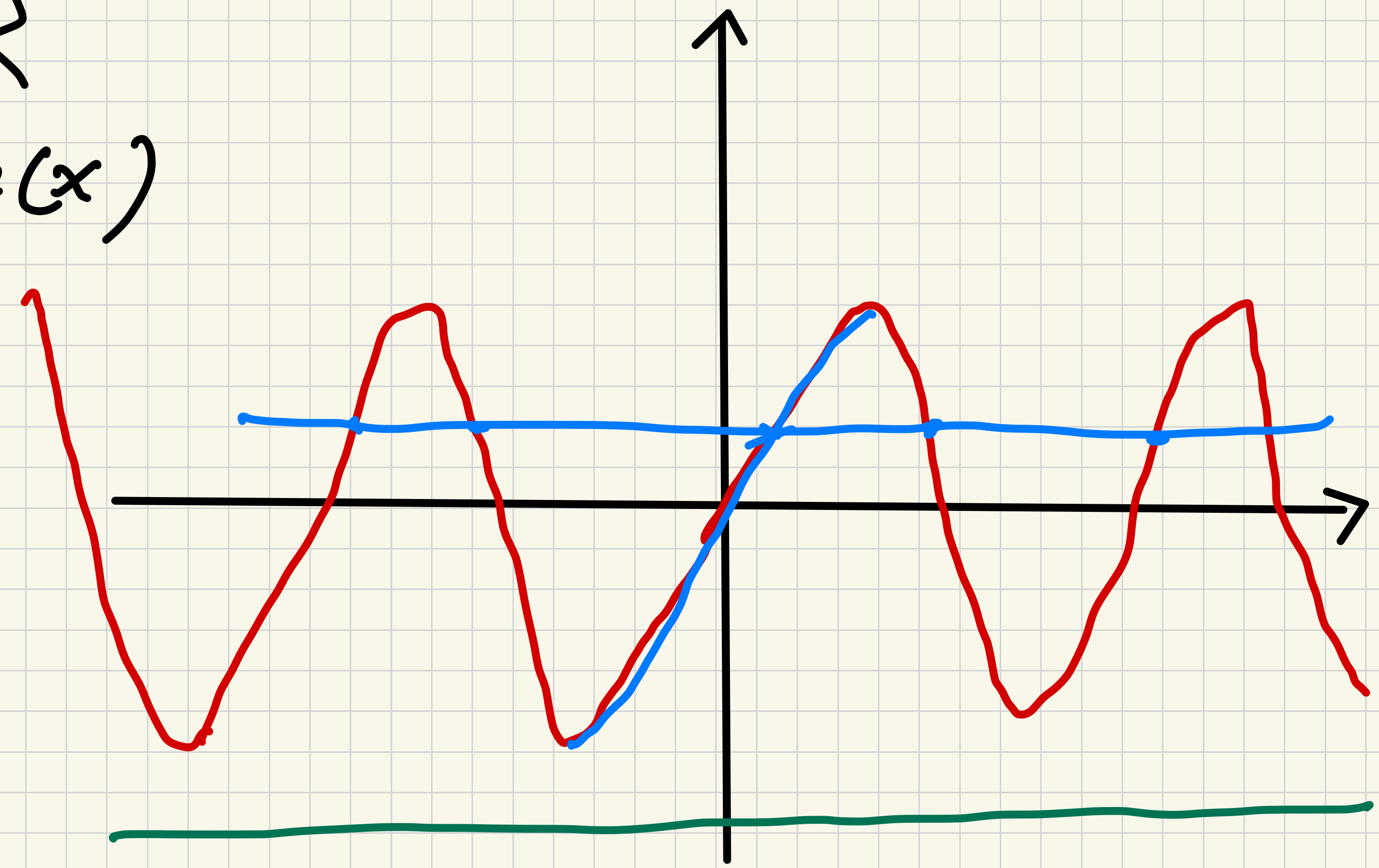


La fct inverse de x^2 et $\sqrt{x}$!

Exemple : $$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$$

ni injective

ni surjective



$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & [-1;1] \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$$ est surjective

$$f: \begin{array}{rcl} \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] & \to & [-1;1] \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$$ est bijective

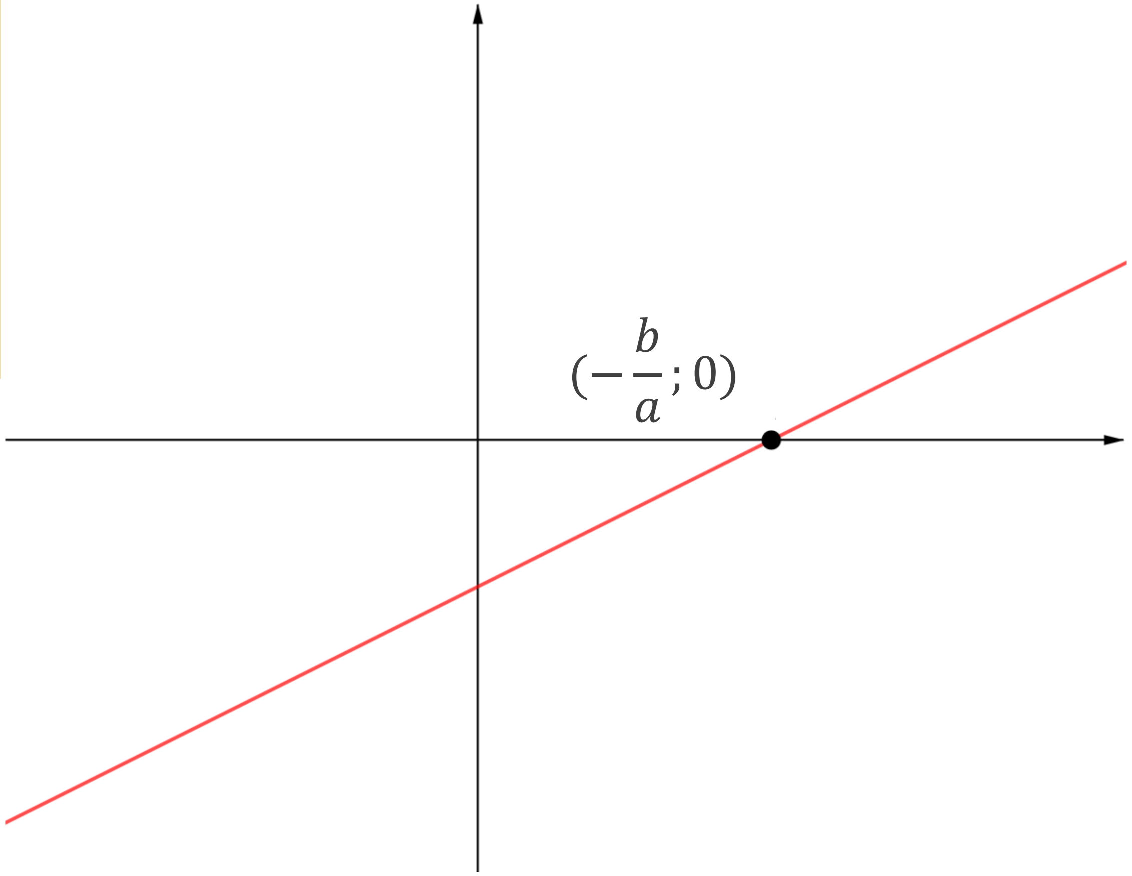
Équation du premier degré

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. L'expression

$$P(x) = ax + b$$

s'appelle un **polynôme** en x :

- de degré 0 si $a = 0$
- de degré 1 si $a \neq 0$



L'équation du premier degré associée est :

$$ax + b = 0.$$

Soit $a \neq 0$, alors l'équation admet comme solution

$$x = -\frac{b}{a}$$

Géométriquement, cette solution est représentée par le point d'intersection de la droite représentée par la fonction affine $f(x) = ax + b$ avec l'axe des abscisses (Ox).

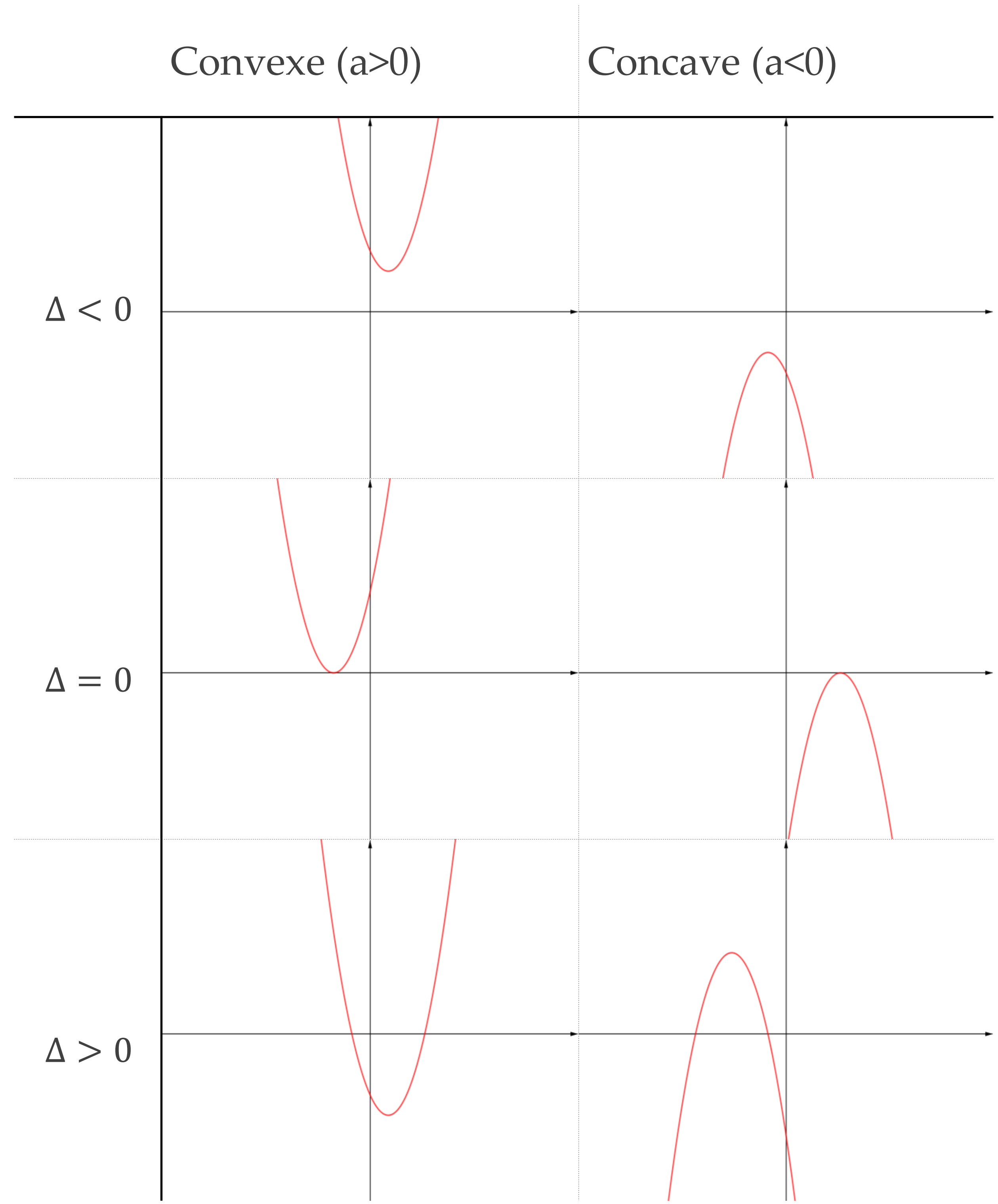
Fonctions du second degré

- Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, la fonction

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

s'appelle **fonction quadratique** ou fonctions polynomiales du second degré.

- Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé *discriminant*.
- La représentation graphique d'une fonction du second degré est une parabole.



Équation du second degré

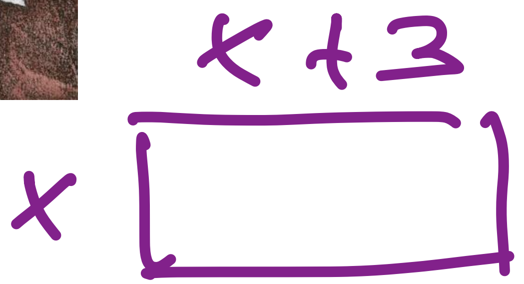
Formule de Viète

Si $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ alors les solutions de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sont données par : $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

François Viète
1540-1603



Exemple :

On cherche à construire un champ rectangulaire de surface $12m^2$ et dont la longueur excède de 3 mètres la largeur.

On pose : $x =$*largeur du champ* et donc $x + 3 =$*longueur du champ*. Alors

$$x(x+3) = 12$$
$$x^2 + 3x - 12 = 0$$

$x(x+3)=12$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+48}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{57}}{2}$$

On obtient deux solutions, une positive l'autre négative. Ainsi $x \approx 2.27m$.

Solutions complexes

Si le *discriminant* est négatif, il n'y a pas de solutions car la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas !! Quoique ….

Cela n'existe pas dans les nombres réels. Mais on peut introduire les nombres complexes. On définit

- le **nombre imaginaire** $\boldsymbol{i}$ par la propriété
$$i^2 = -1$$
- **l'ensemble des nombres complexes** comme tous les nombres de la forme
$$z = a + bi$$

avec a et b réels. Le nombre réel *a* est la **partie réelle** de *z* et le nombre réel *b* sa **partie imaginaire**.

Exemples :

Ne pas écrire $\sqrt{-1} = i$!!

$$z = \sqrt{2} + \pi \cdot i$$

$$z = 2i \text{ avec } z^2 = -4$$

$$z = \frac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2} \text{ avec } z^3 = 1$$

$(2i)^2 = 4 \cdot i^2 = -4$

$$x^2 + 1 = 0 \qquad x^2 = -1$$

$$\Delta = -4 < 0 \qquad \boxed{i^2 = -1}$$

$$z = \underbrace{a}_{\text{partie réelle}} + \underbrace{b}_{\text{partie imaginaire}} \cdot i \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

$$z = \pi + \underline{\sqrt{2}} \cdot i \qquad \boxed{\mathbb{C}}$$

$$(\underbrace{2+3i}_{z}) + (\underbrace{5+6i}_{w})$$

$$= 7 + 9i$$

$$(2+3i)\cdot(5+6i) = 10 + 12i + 15i + 18\underbrace{i^2}_{-1} = -8 + 27i$$

$$(2x + 3y) + (4x + 5y)$$

$$= 6x + 8y$$

$$\underline{\underline{x^3-1}} = (x-1)(\underbrace{x^2+x+1})$$

$$\Delta = 1-4 = -3 < 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$$

$$(\sqrt{3}\,i)^2 = 3 \cdot i^2 = -3$$

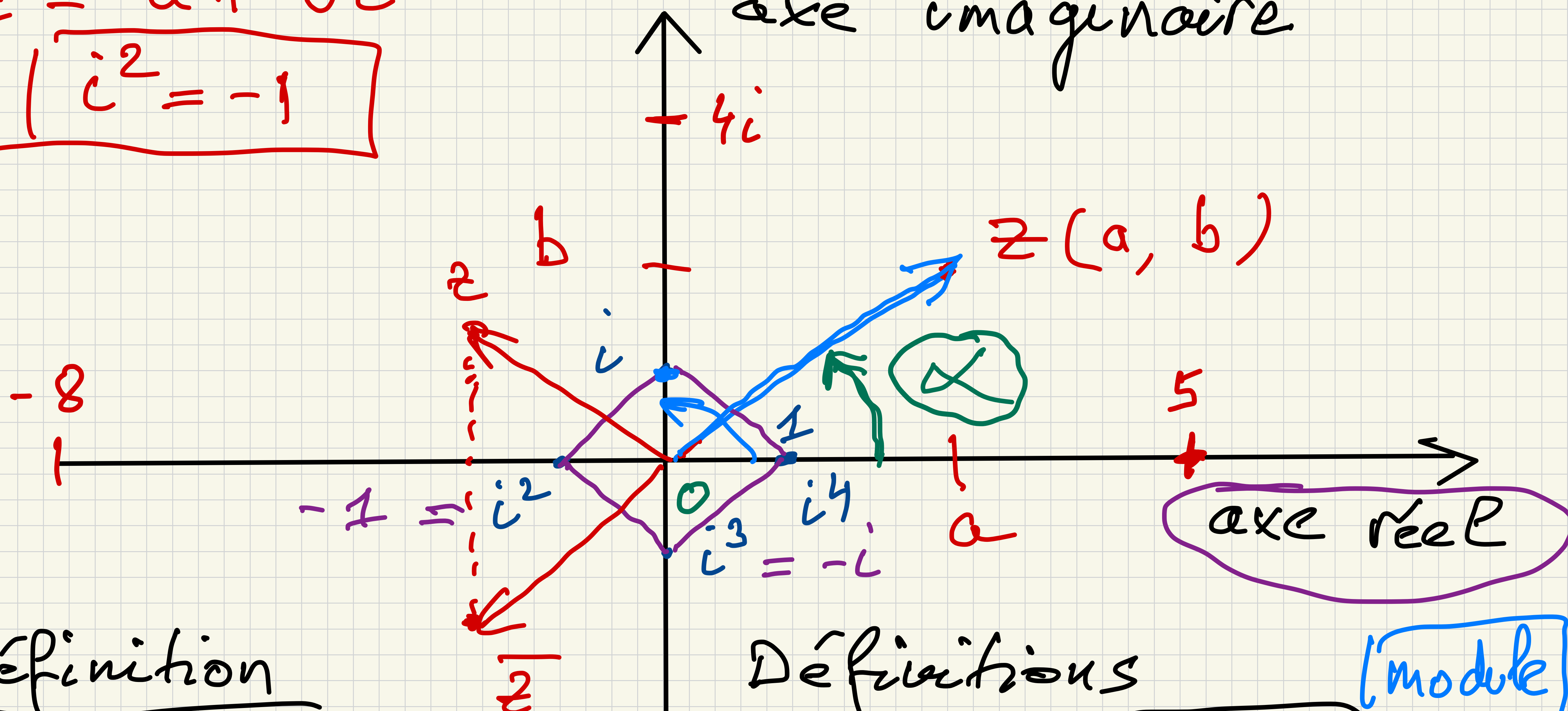
$$= (x-1)\left(x - \overbrace{\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}}^{j}\right)\left(x - \overbrace{\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}}^{\bar{j}}\right)$$

$\arg(i) = \pi/2$

Plan complexe

$z = a + bi$

$\boxed{i^2 = -1}$



Définition

$\bar{z} = a - bi$

Conjugué complexe

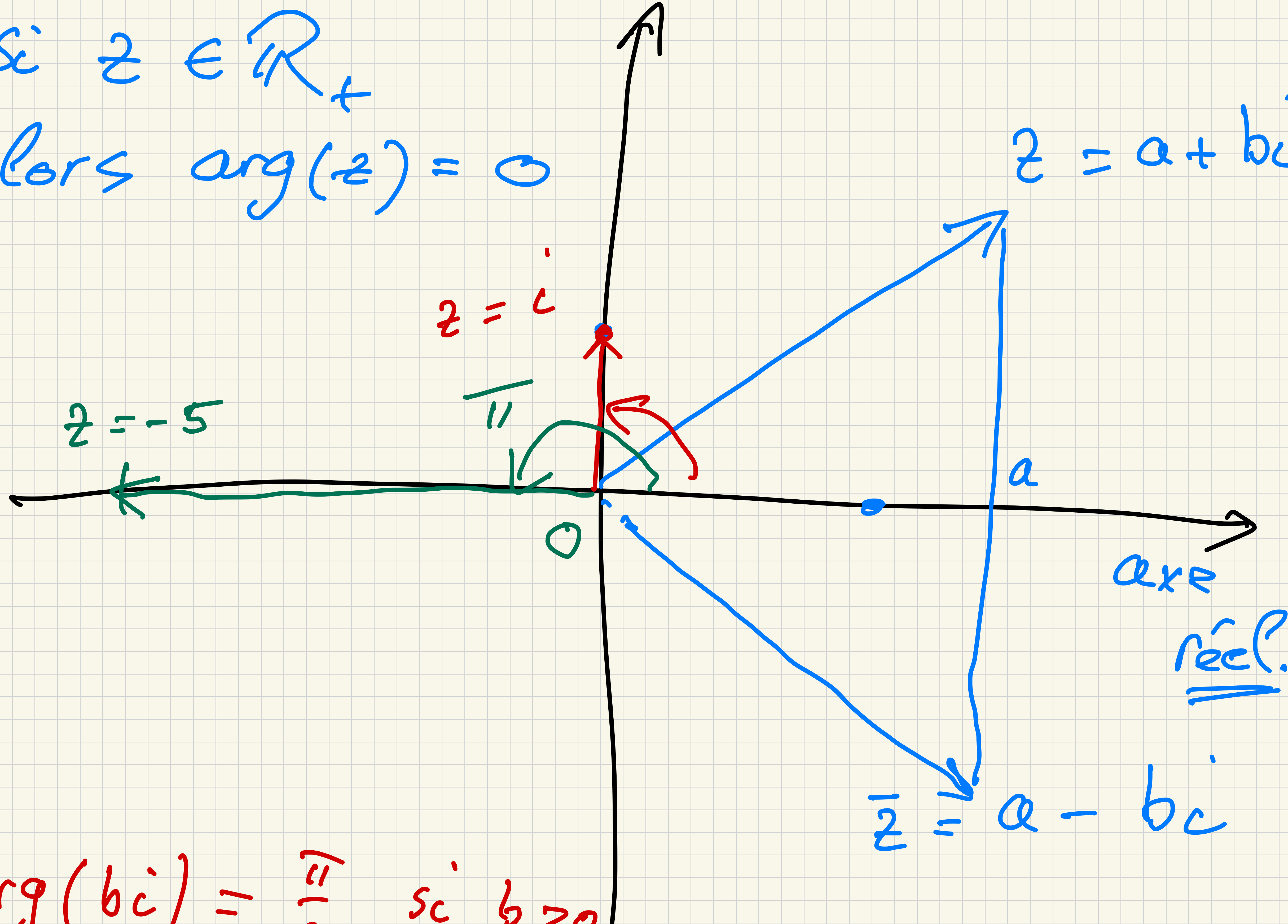
Définitions

1. $|z| = \underline{\sqrt{a^2 + b^2}} \geqslant 0$ module
2. $\arg(z) = \alpha$

si $z \in \mathbb{R}$, $z = a$ $|z| = |a|$

si $z \in \mathbb{R}_+$

alors $\arg(z) = 0$



$\arg(bi) = \frac{\pi}{2}$ si $b > 0$

L'effervescence intellectuelle du XVIe siècle

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

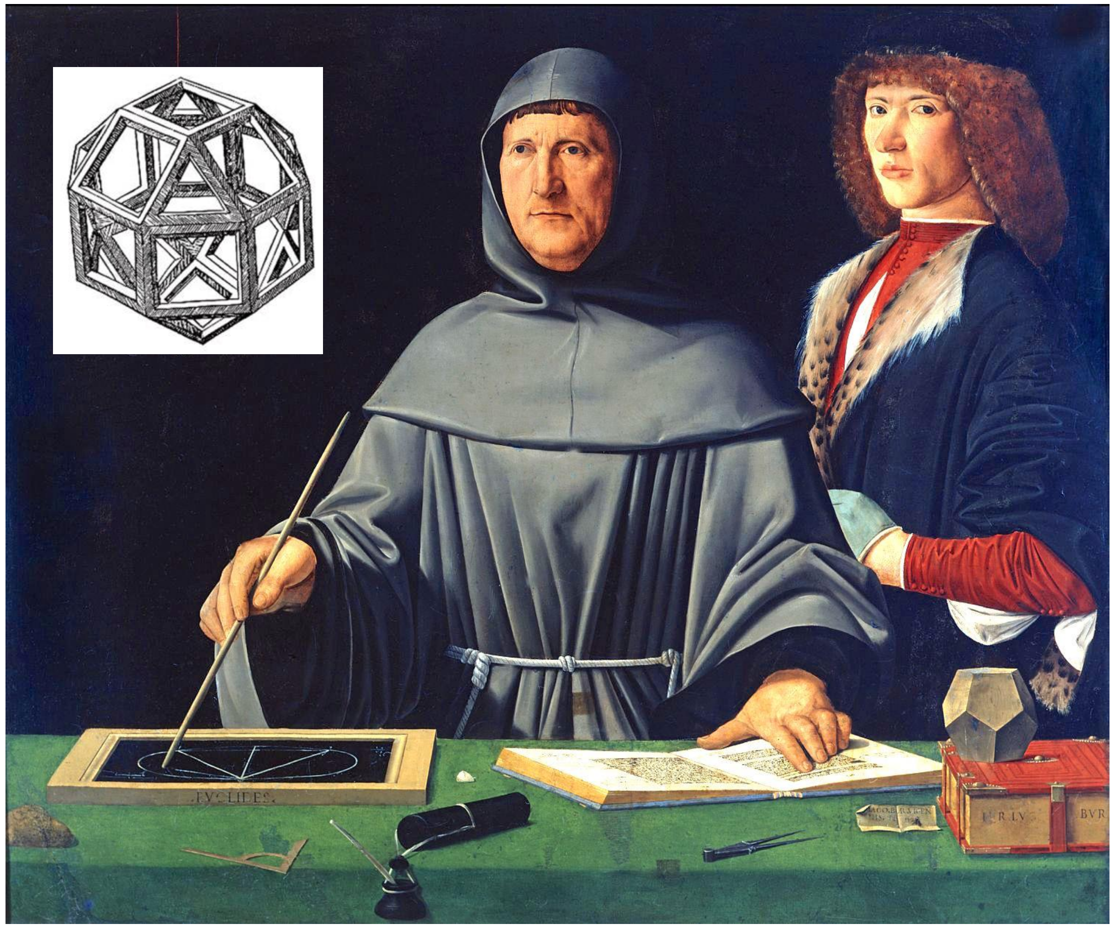
« L'équation cubique est impossible à résoudre comme l'est la quadrature du cercle »

Luca Pacioli - *Summa de arithmetica, geometria, de proportioni et de proportionalita* - 1494

Scipione del Ferro résout, vers 1515, les équations du type

$$x^3 + px + q = 0$$

où p est une constante positive et q une constante négative. Sa méthode a été améliorée par *Jérôme Cardan* quelques décennies plus tard.



Luca Pacioli
1445 - 1517

Sur l'équation cubique

Nous souhaitons résoudre une équation cubique :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \qquad \text{où } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

La première étape consiste à la simplifier en la divisant par a et en introduisant z :

$$x = z - \frac{b}{3a}$$

pour obtenir l'équation sous la *forme réduite* suivante :

$$z^3 + pz + q = 0$$

où les coefficients p et q dépendent de a, b, c, d.

Jérôme Cardan
1501-1576

En 1547, *Cardan* a établi e qu'une solution de l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

où p et q sont deux constantes. La solution est donnée par la formule

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$$

où $\Delta = (\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3$.

Combien de solutions ?

Soit l'équation réduite

$$x^3 + px + q = 0$$

et $\Delta = (\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3$ le discriminant. Alors

1. si $\Delta > 0$ alors l'équation admet trois racines distinctes, dont une réelle et deux complexes conjuguées ;
2. si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une racine double ou triple et toutes ses racines sont réelles ;
3. si $\Delta < 0$ alors l'équation admet trois racines réelles distinctes.

Remarque : historiquement, les nombres complexes ont été introduits pour être utilisés momentanément pour résoudre des problèmes réels.

« On fait apparaître ce qui nous manque puis on le fait disparaître pour retrouver l'équilibre »

Cadran.

Démonstration par récurrence

On souhaite démontrer une propriété

$$P(n)$$

Pour tout nombre entier positif $n \geq 0$.

La démonstration par récurrence se fait en 2 étapes:

- On démontre que P est vraie pour $n = 0$ (parfois $n = 1$)
- On démontre que si P est vraie pour n (hypothèse de récurrence) alors P est vraie pour $n+1$.

Alors P est vraie pour tout entier n

$P(n) \quad \forall n \geq n_0 \quad n \in \mathbb{N}$

- On prouve $P(n_0)$
- On prouve

$$P(n) \Longrightarrow P(n+1)$$

Exemple : $1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = S_n$

$n = 1 \quad S_1 = 1 \quad S_2 = 5 \quad S_3 = 14$

$S_4 = 30 \quad S_5 = 55 \quad S_6 = 91$

$$\boxed{S_n = \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1) = \frac{1}{6}\left(2n^3 + 3n^2 + n\right)}$$

- $\underline{n = 1}$ $\quad 1 \stackrel{?}{=} \frac{1}{6} \cdot 1(2)(3) = 1$ ✓

$$\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$1 + 2^2 + \dots + (n+1)^2 \stackrel{?}{=} \underline{\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)}$$

$$= \frac{1}{6}(n^2 + 3n + 2)(2n+3)$$

$$\stackrel{?}{=} \underline{\underline{\frac{1}{6}\left(2n^3 + 9n^2 + 13n + 6\right)}}$$

Formule obtenue en remplaçant n par $(n+1)$

$$\underbrace{1+2^2+\cdots+n^2}_{} + (n+1)^2 =$$

Hyp. de récurrence $\underbrace{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}_{S_n} + (n+1)^2$

$$= \frac{1}{6}\left(2n^3+3n^2+n\right) + \frac{1}{6}\left(6n^2+12n+6\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(2n^3+9n^2+13n+6\right)$$

$$= \frac{1}{6}\underline{(n+1)(n+2)(2n+3)} = S_{n+1} \quad \checkmark\checkmark$$