Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Longueur d'arc et développantes

Philippe Chabloz

Longueur d’arc

On considère une courbe C

Nous allons calculer la longueur d'une portion de cette courbe entre les deux points $P(x, y)$ et $R(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

La longueur d’arc entre P et R est approximée par Δs où

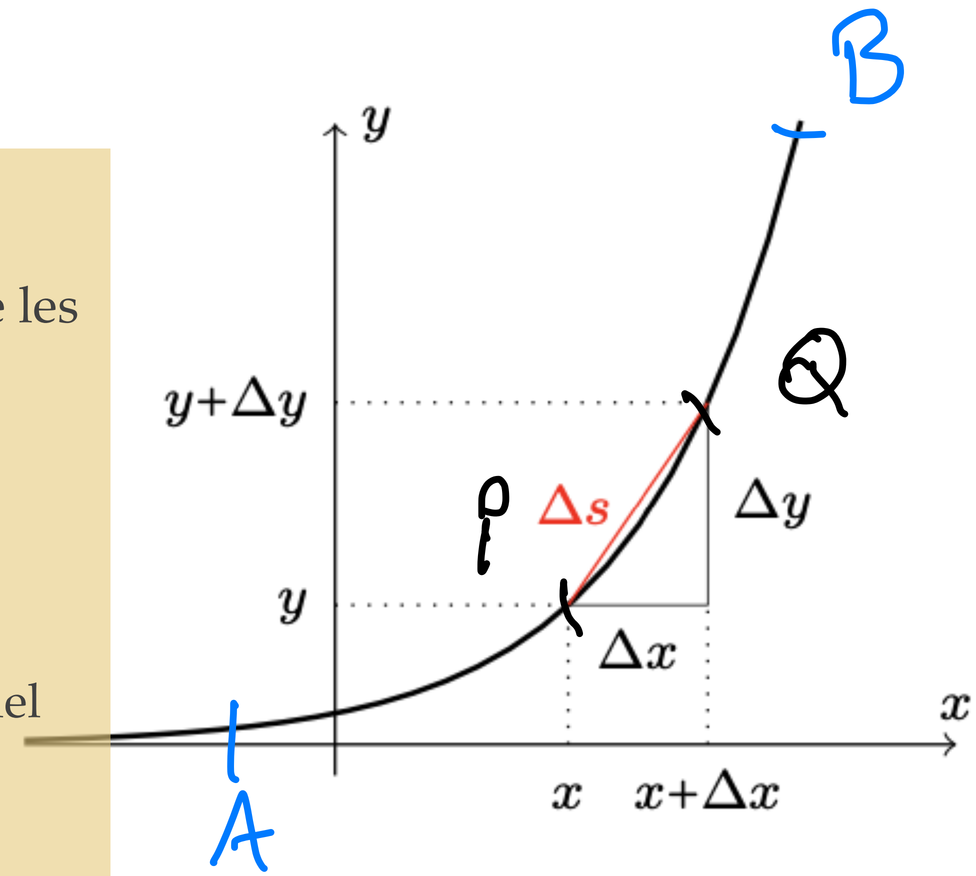
$$\boxed{(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Si on fait tendre le point R vers le point P on obtient l’élément différentiel (infiniment petit) :

$$\boxed{\mathrm{d}s = \sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

En **intégrant l’élément différentiel ds** sur un segment de C on obtient la longueur totale du segment

$$L = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2}$$



Longueur d'arc (forme paramétrique)

$$\mathrm{d}s = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Si la courbe est donnée sous forme paramétrique $\mathrm{c}(t) = (x(t), y(t))$ avec $x(t)$ et $y(t)$ des fonctions continues et dérivables.

La longueur de la courbe entre deux points $P(x(a), y(a))$ et $R(x(b), y(b))$, obtenus en fixant la valeur du paramètre $t = a$ et $t = b$ respectivement (avec $b > a$), est donnée par

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

En effet $x = x(t)$ donne par définition de la dérivée $x'(t) = \frac{dx}{dt}$ et donc $dx = x'(t)\, dt$

De même $y = y(t)$ donne $y'(t) = \frac{dy}{dt}$ et donc $dy = y'(t)\, dt$

Alors l'élément différentiel de longueur d'arc ds de la courbe c vaut

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{x'(t)^2\, dt^2 + y'(t)^2\, dt^2} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, |dt|$$

$$= \|c'(t)\|\, dt$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \qquad c(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$c'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \qquad x'(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$x'(t) \cdot dt = dx$$

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \boxed{y'(t)\, dt = dy}$$

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 dt^2 + y'(t)^2 dt^2} =$$

$$= \sqrt{\underbrace{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \cdot dt = \|c'(t)\| \cdot dt$$

Formes cartésienne

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

Si la courbe est donnée sous forme **cartésienne explicite** $y = f(x)$ alors on peut utiliser la paramétrisation canonique

$$x(t) = t, \quad y(t) = f(t)$$

ce qui donne $x'(t) = 1$ et $y'(t) = f'(t)$. La longueur d'un segment de la courbe vaut alors

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

$$c(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \qquad c'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix}$$

$$\| c'(x) \| = \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

vitesse $v = \frac{d}{T}$

d : distance

T : temps

$$d = v \cdot T$$

$$ds = v(t) \cdot dt \qquad L = \int \underbrace{v(t)\, dt}_{ds}$$

Exercice

Une parabole d'équation $y = x^2$ intersecte un cercle d'équation

$$x^2 + (y-1)^2 = 1.$$

Est-il possible que la longueur de l'arc de parabole inscrit dans le cercle soit supérieure ou égale à 4 ?

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

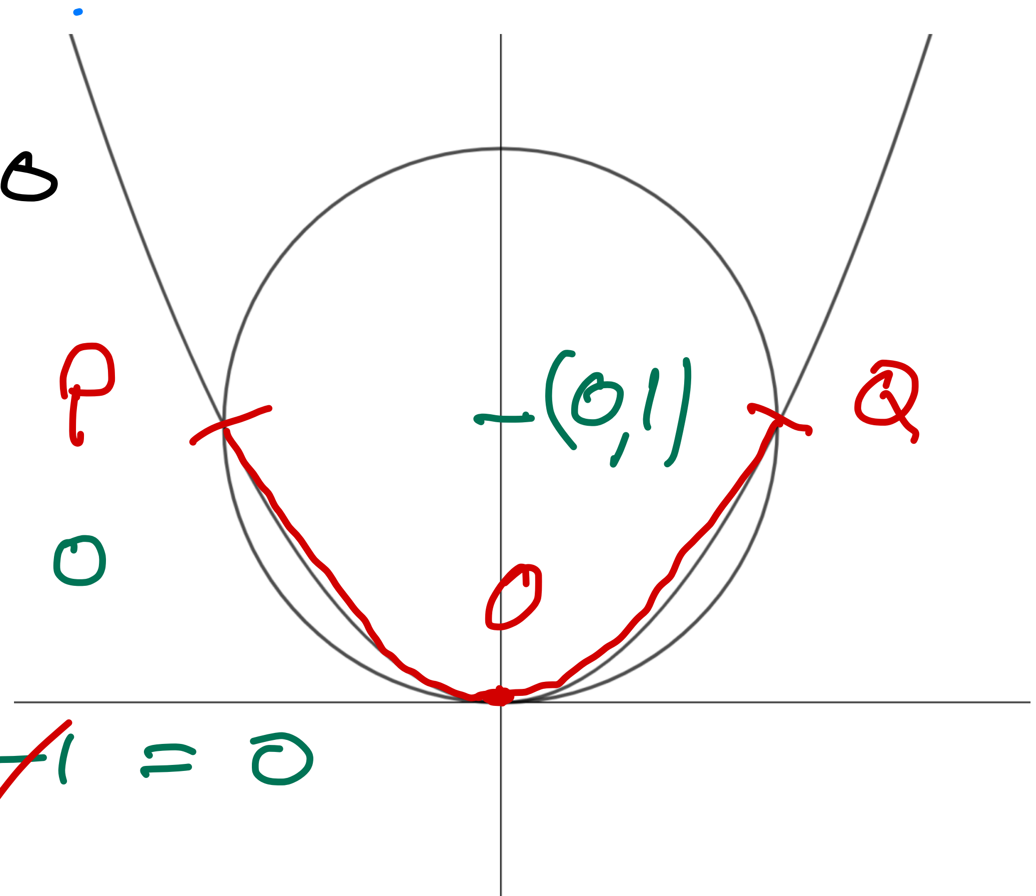
$\downarrow$ $y = x^2$

$$x^2 + (x^2-1)^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + x^4 - 2x^2 \cancel{+1} \cancel{-1} = 0$$

$$x^4 - x^2 = 0$$

$$x^2(x^2-1) = 0 \qquad x^2(x-1)(x+1) = 0$$



$$y = x^2$$
$$= f(x)$$

$x = -1 \Rightarrow P$

$x = 1 \Rightarrow Q$

$x = 0 \Rightarrow O$

$$L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+4x^2}\,dx$$

$z = 2x$

$dz = 2dx$

$$= 2\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx = \cancel{2}\int_0^{2} \sqrt{1+z^2}\,\frac{dz}{\cancel{2}}$$

$$= \int_0^2 \sqrt{1+z^2}\,dz$$

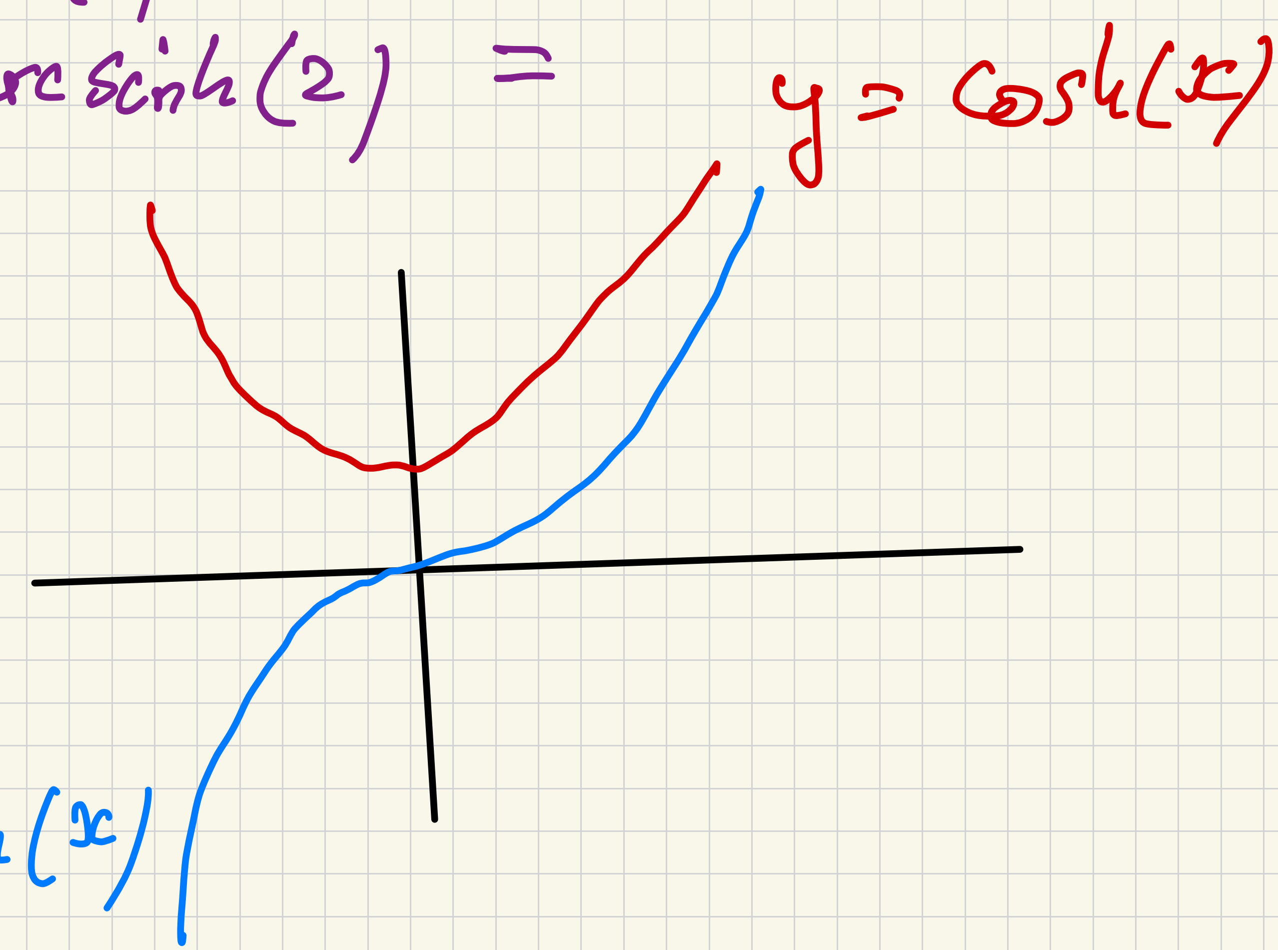
$z = \mathrm{sch}(u)$

$dz = \cosh(u)\,du$

$B = \mathrm{arcsinh}(2) =$

$\cosh^2(\alpha) - \mathrm{sch}^2(\alpha) = 1$

$\cosh^2(\alpha) = 1 + \mathrm{sch}^2(\alpha)$



$$\int_0^B \underbrace{\sqrt{1+\sinh^2(u)}}_{|\cosh(u)|} \cdot \cosh(u)\, du = \int_0^B \cosh^2(u)\, du$$

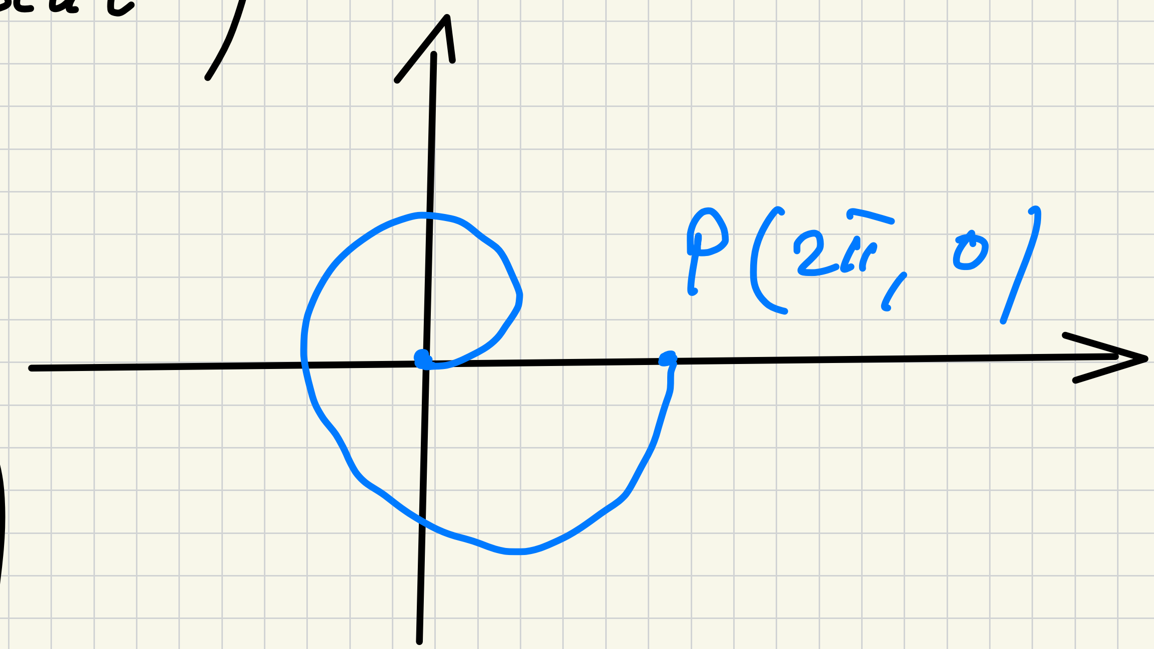
$$\cosh^2(u) = \frac{\cosh(2u)+1}{2} \quad \text{(formulaire !)}$$

$$= \int_0^B \frac{\cosh(2u)+1}{2}\, du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sinh(2u)\Big|_0^B$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(2) + \frac{1}{4}\sinh\big(2\operatorname{arcsinh}(2)\big) \cong 2{,}96$$

Exemple 2

$$c(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \end{pmatrix} \qquad t \in [0, 2\pi]$$



$$L = \int \|c'(t)\|\, dt$$

$$c'(t) = \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t \\ \sin t + t\cos t \end{pmatrix}$$

$$\|c'(t)\| = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2}$$

$$= \sqrt{\cos^2 t + t^2\sin^2 t - \cancel{2t\cos t\sin t} + \sin^2 t + t^2\cos^2 t + \cancel{2t\cos t\sin t}}$$

$$= \sqrt{1 + t^2}$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2}\, dt = \int_0^{\beta} \sqrt{1+\sinh^2(z)} \cdot \cosh(z)\, dz$$

$t = \sinh(z)$

$dt = \cosh(z)\, dz$

$\beta = \operatorname{arcsinh}(2\pi)$

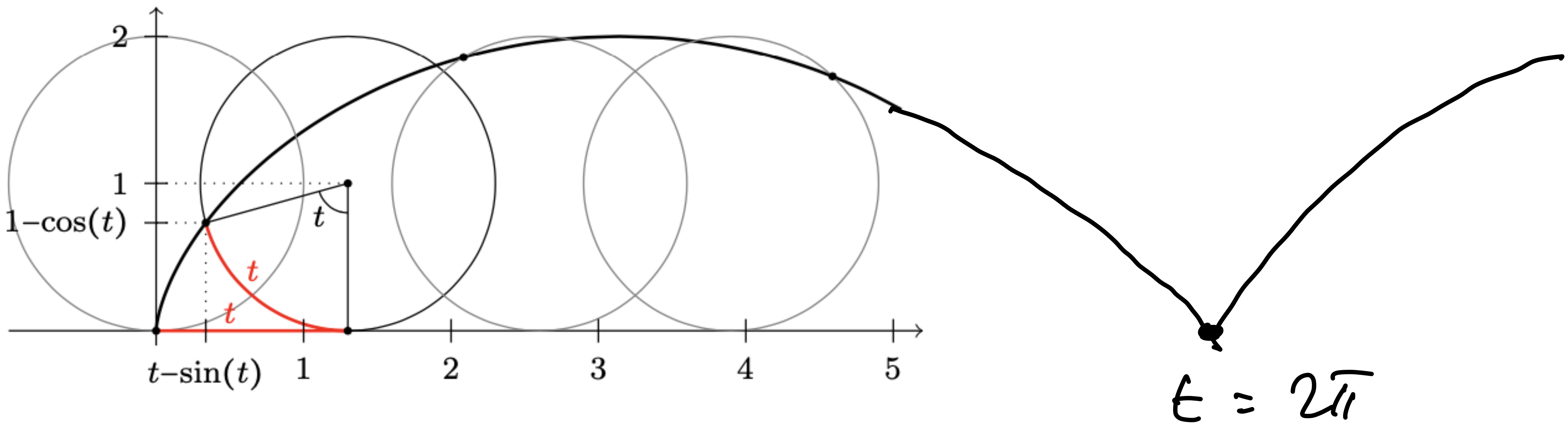
$$= \int_0^{\beta} \cosh^2(z)\, dz = \int_0^{\beta} \frac{\cosh(2z)+1}{2}\, dz$$

$$= \frac{1}{2} z + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sinh(2z) \Big|_0^{\beta} =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh}(2\pi) + \frac{1}{4} \sinh(2 \operatorname{arcsinh}(2\pi))$$

$$= 21{,}25$$

Longueur de la cycloïde



$t = 2\pi$

- *Rappel* : la cycloïde est une courbe plane, trajectoire d'un point fixé à un cercle (de rayon 1) qui roule sans glisser sur une droite.

- La courbe peut être définie paramétriquement par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin(t) \\ y(t) = 1 - \cos(t) \end{cases} \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

$x(2\pi) = 2\pi$
$y(2\pi) = 0$

Quelle est la longueur d'arc d'un cycle de la cycloïde, c'est-à-dire entre les points $P(0,0)$ et $R(2\pi, 0)$?

$$c(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix} \qquad c'(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$\|c'(t)\| = \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}$$

$$= \sqrt{2 - 2\cos t} = \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}\, dt =$$

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$$

$$2\sin^2(\alpha) = 1 - \cos(2\alpha) \quad \alpha = \frac{t}{2}$$

$$2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = 1 - \cos(t)$$

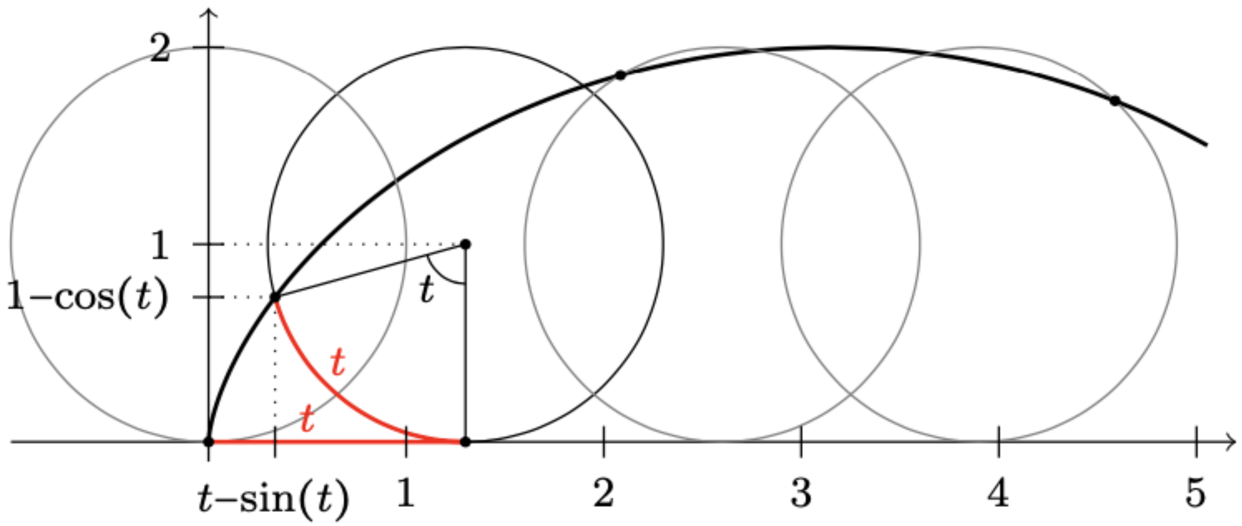
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\sqrt{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\, dt = 2\int_0^{2\pi} \left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| dt$$

$$2 \cdot \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}_{\geq 0} dt = 2 \cdot 2\left(-\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)\Big]_0^{2\pi}$$

$$= 4 \cdot (1 + 1) = \underline{\underline{8}}$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Longueur de la cycloïde



$$\begin{cases} x(t) = t - \sin(t) \\ y(t) = 1 - \cos(t) \end{cases}$$

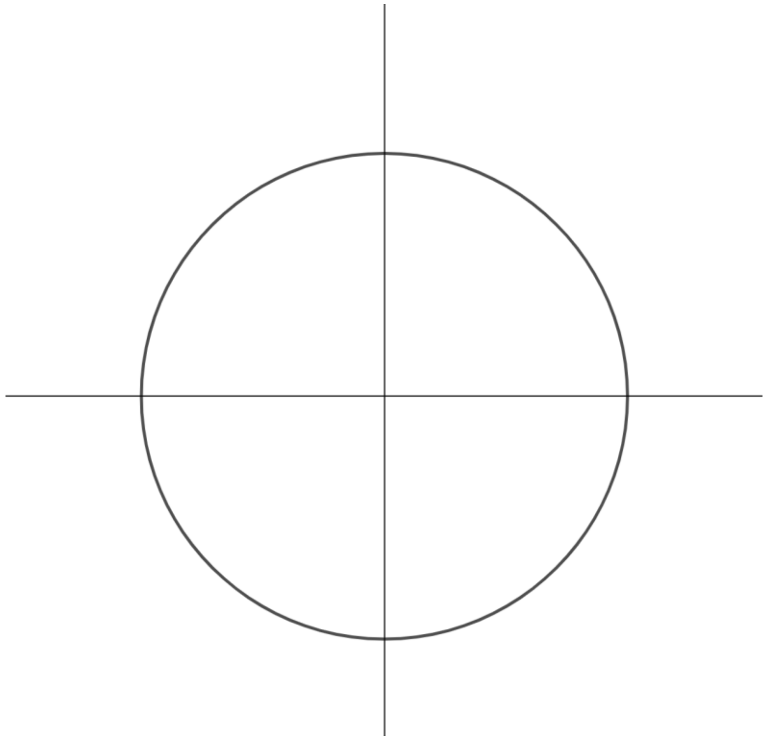
Quelle est la longueur d'arc d'un cycle de la cycloïde, c'est-à-dire entre les points $P(0,0)$ et $R(2\pi, 0)$?

Développantes du cercle

Problème (Huygens 1673) : étant donné une courbe C et un point $P \in C$, on déroule un câble de longueur constante $L \in \mathbb{R}$ à partir du point P et en direction de la tangente à la courbe. En gardant le câble tendu (*tangente à la courbe*), trouver l'équation de la courbe décrite par l'extrémité libre du câble.

Cette courbe s'appelle **développante de C par rapport au point P**.

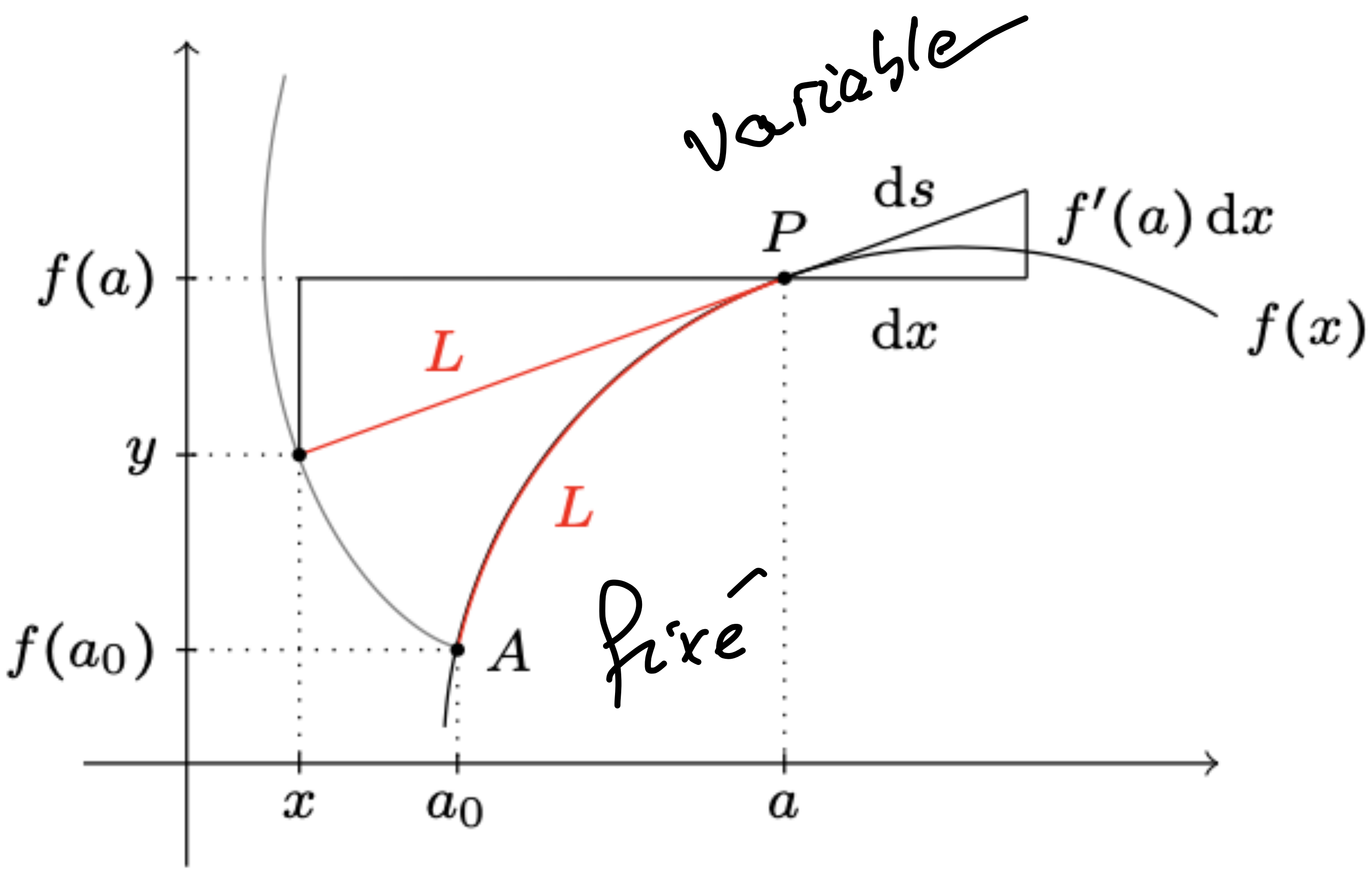
Huygens cherchait à concevoir des horloges sans pendule pour une utilisation sur un bateau en mer. Il utilisa la développante du cercle dans une tentative de forcer le pendule à se balancer selon le tracé d'une cycloïde.



Christiaan Huygens
1629 - 1695

Équation de la développante d'une courbe

- Pour obtenir l'équation de la développante, il est plus pratique de considérer que le fil de longueur variable $L \in \mathbb{R}$ se *déroule* le long de la courbe.
- Choisissons un point $A(a, f(a))$, où $a \in \mathbb{R}$, sur la courbe $y = f(x)$ qui sera l'extrémité du fil enroulé, c'est-à-dire le "*point de départ*" de la développante.
- Après avoir déroulé une longueur L du fil, celui-ci est tangent à la courbe en un point P.



Équation de la développante d'une courbe paramétrée.

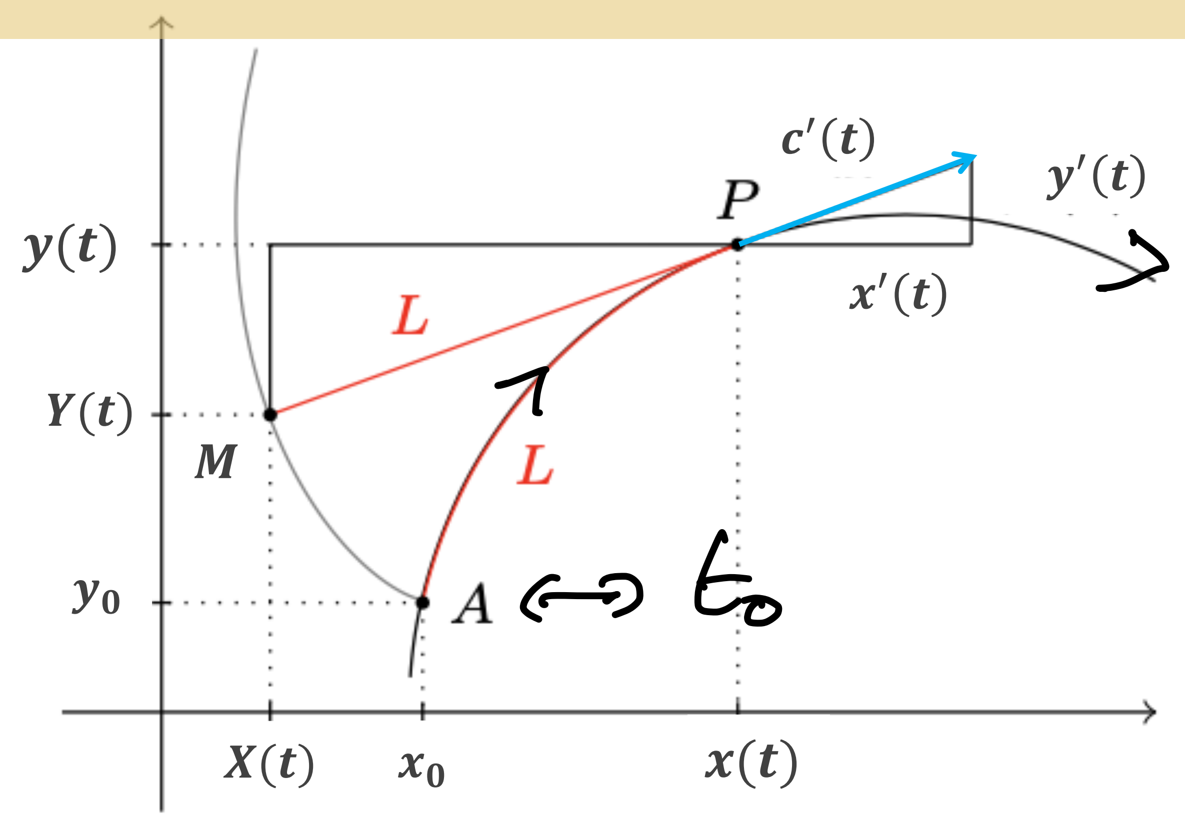
Considérons une courbe donnée par des équations paramétriques : $c(t) = (x(t), y(t))$ et $t \in I$, où $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions continues et dérivables.

La développante de la courbe au point $A(x(t_0), y(t_0))$ est donc la courbe d'équations paramétriques :

$$X(t) = x(t) - \frac{x'(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} \mathrm{d}s}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}, \qquad Y(t) = y(t) - \frac{y'(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} \mathrm{d}s}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$$

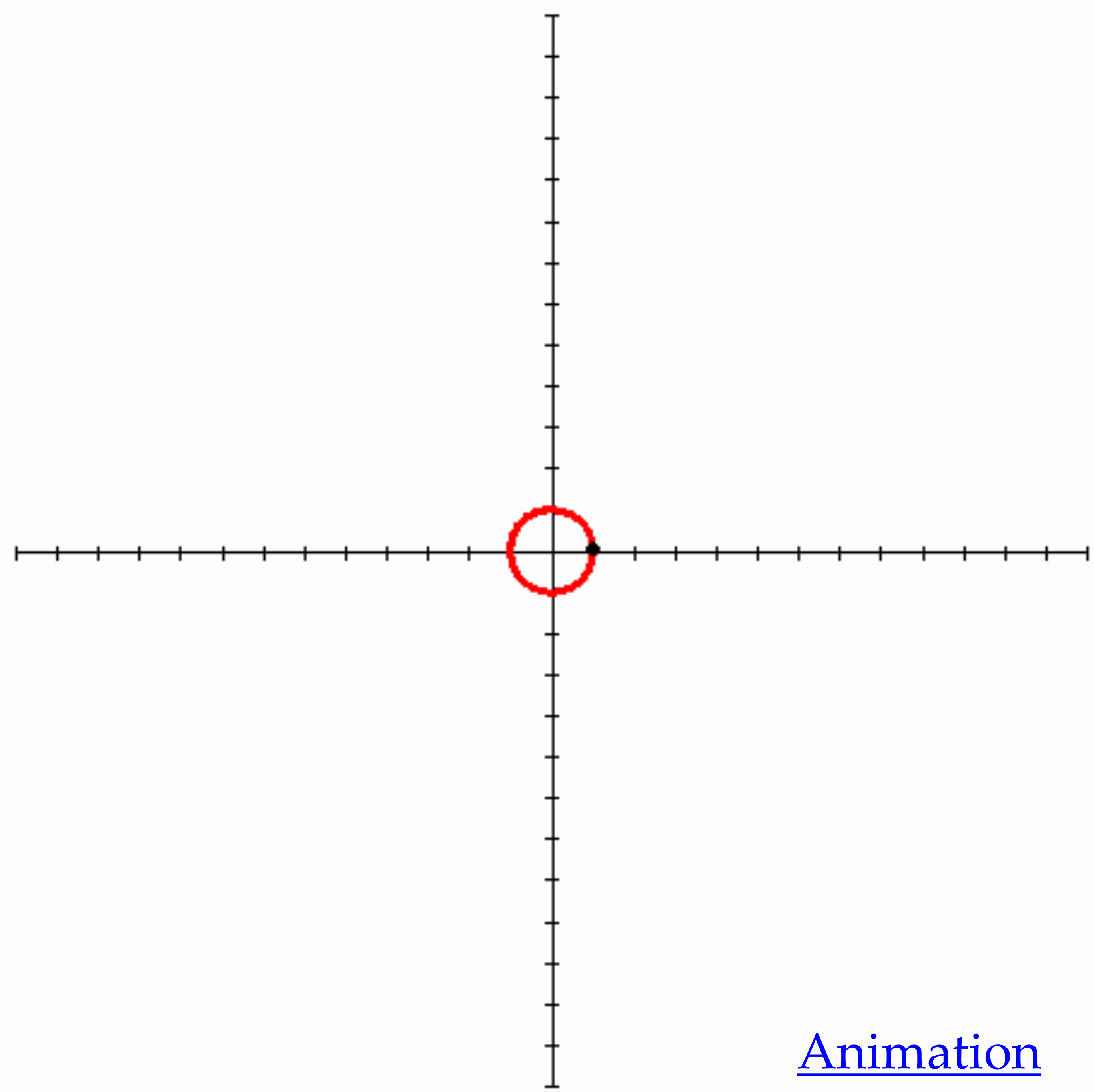
Démonstration:

- La tangente en P a comme vecteur directeur le vecteur tangent: $c'(t) = (x'(t), y'(t))$
- La longueur $L(t)$ vaut $$L(t) = \int_{t_0 \, (A)}^{t \, (P)} \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} \, ds$$
- Et donc $$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} - L(t) \cdot \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$$

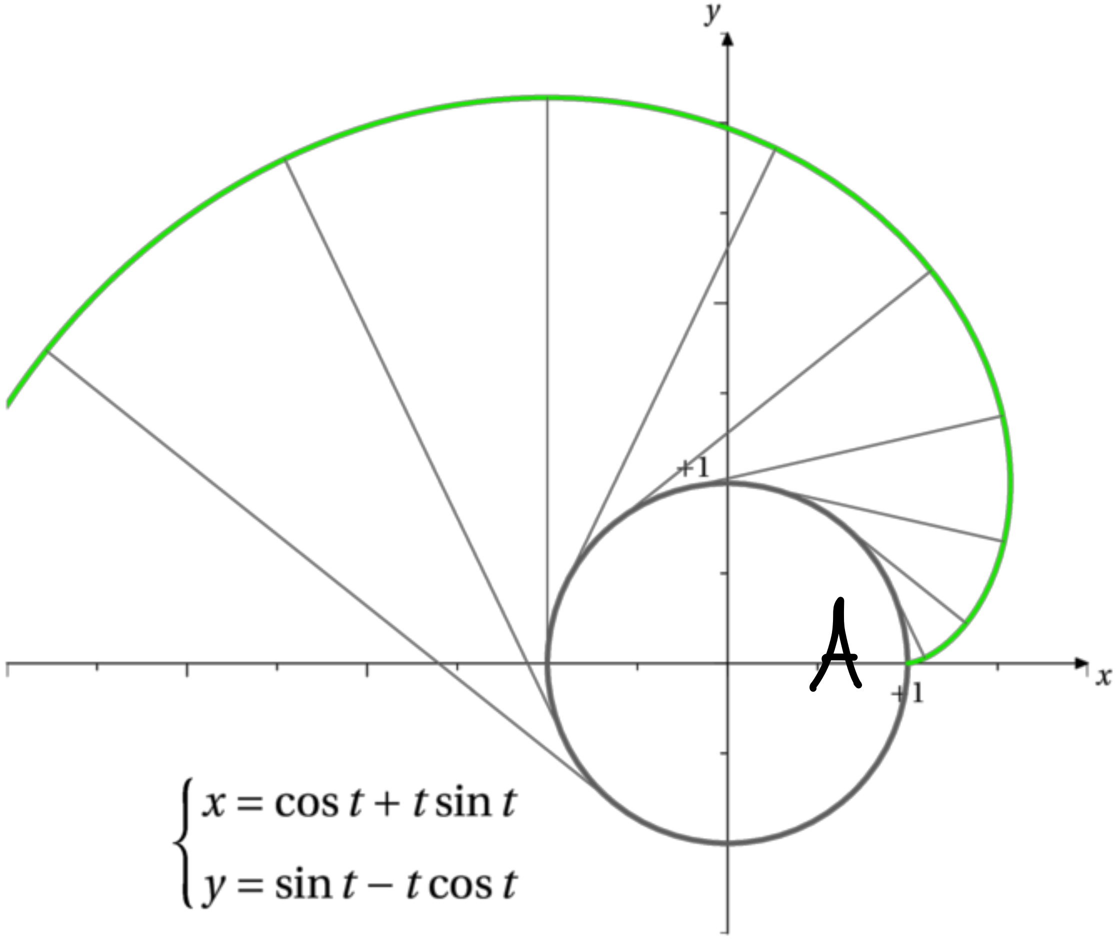


donne $$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \frac{L(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

Exemple : développante du cercle



[Animation]



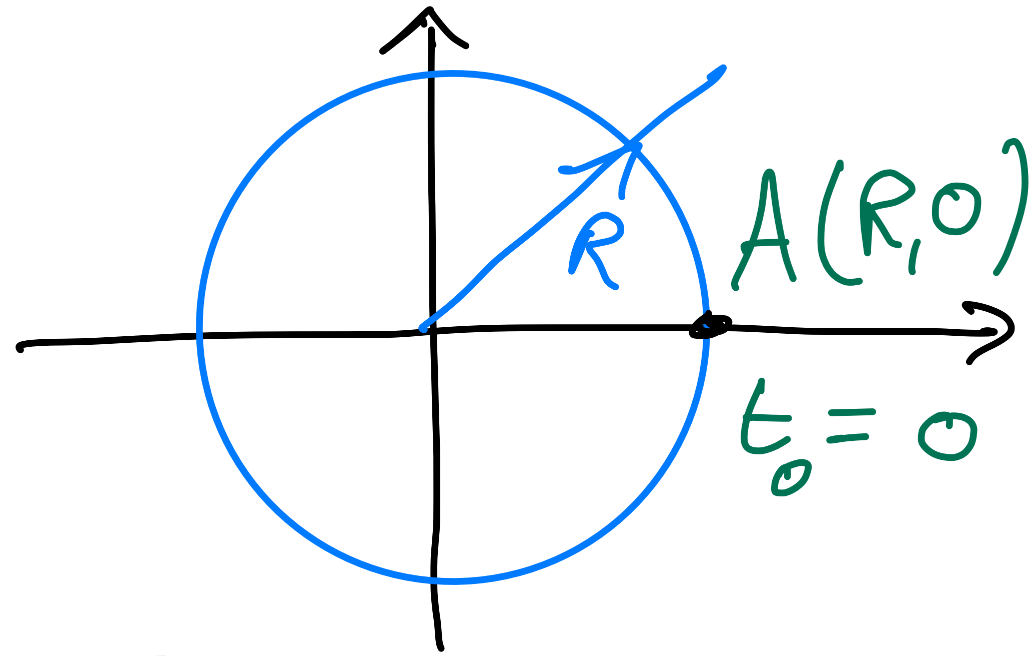
$$\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$$

Développante de cercle

Exemple : développante du cercle

$$c(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$$

$$c'(t) = \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \end{pmatrix}$$



$$\|c'(t)\| = \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t} = R.$$

$$L(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(s)\| \cdot ds = \int_0^t R \cdot ds = R \cdot t$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{L(t)}{\|c'(t)\|} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}}_{c(t)} - \frac{\overset{L(t)}{R \cdot t}}{\underbrace{R}_{\|c'(t)\|}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \end{pmatrix}}_{c'(t)}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos t + Rt\sin t \\ R\sin t - Rt\cos t \end{pmatrix}$$

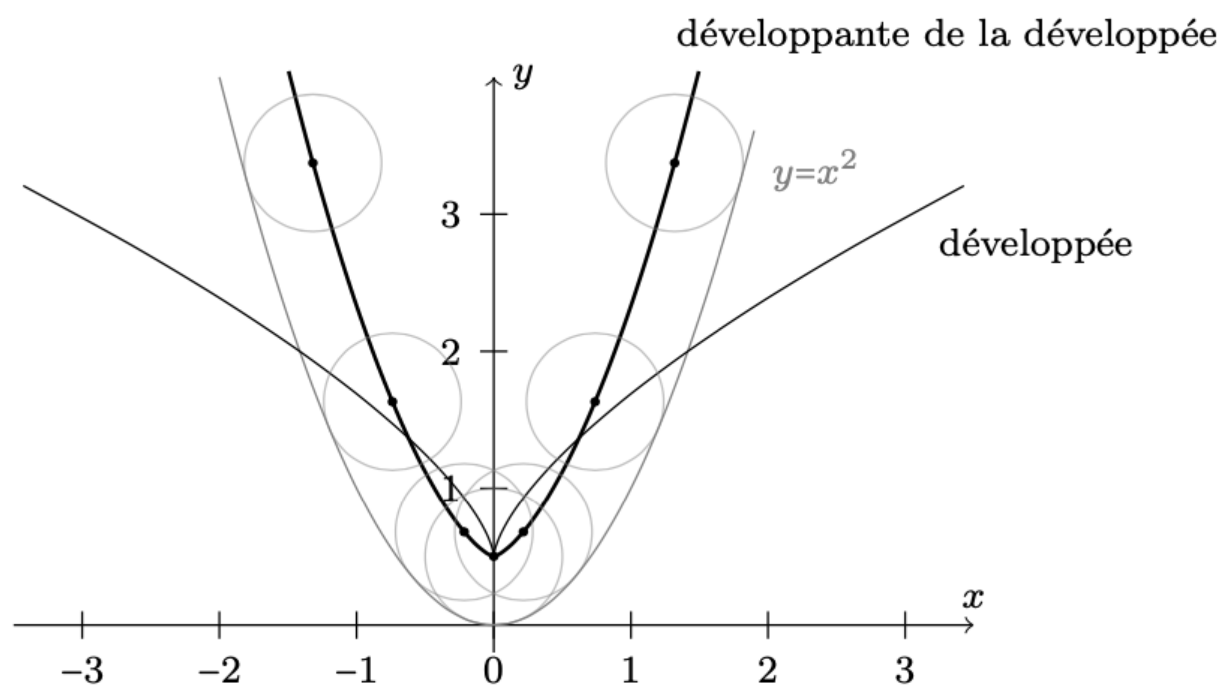
$$= \underbrace{\begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}}_{\text{cercle de rayon } R} + \underbrace{R\begin{pmatrix} t\sin t \\ -t\cos t \end{pmatrix}}_{\text{spirale d'Archimède}}$$

Développante de la développée

D'après l'exemple précédent, la **développante de la développée** ne redonne pas la courbe d'origine. Par contre, on peut montrer que **la développante de la développée** d'une courbe est "*parallèle*" à la courbe originale, c'est-à-dire est une courbe décrite par le centre d'un cercle de rayon constant qui "*roule*" sur la courbe d'origine.

Théorème

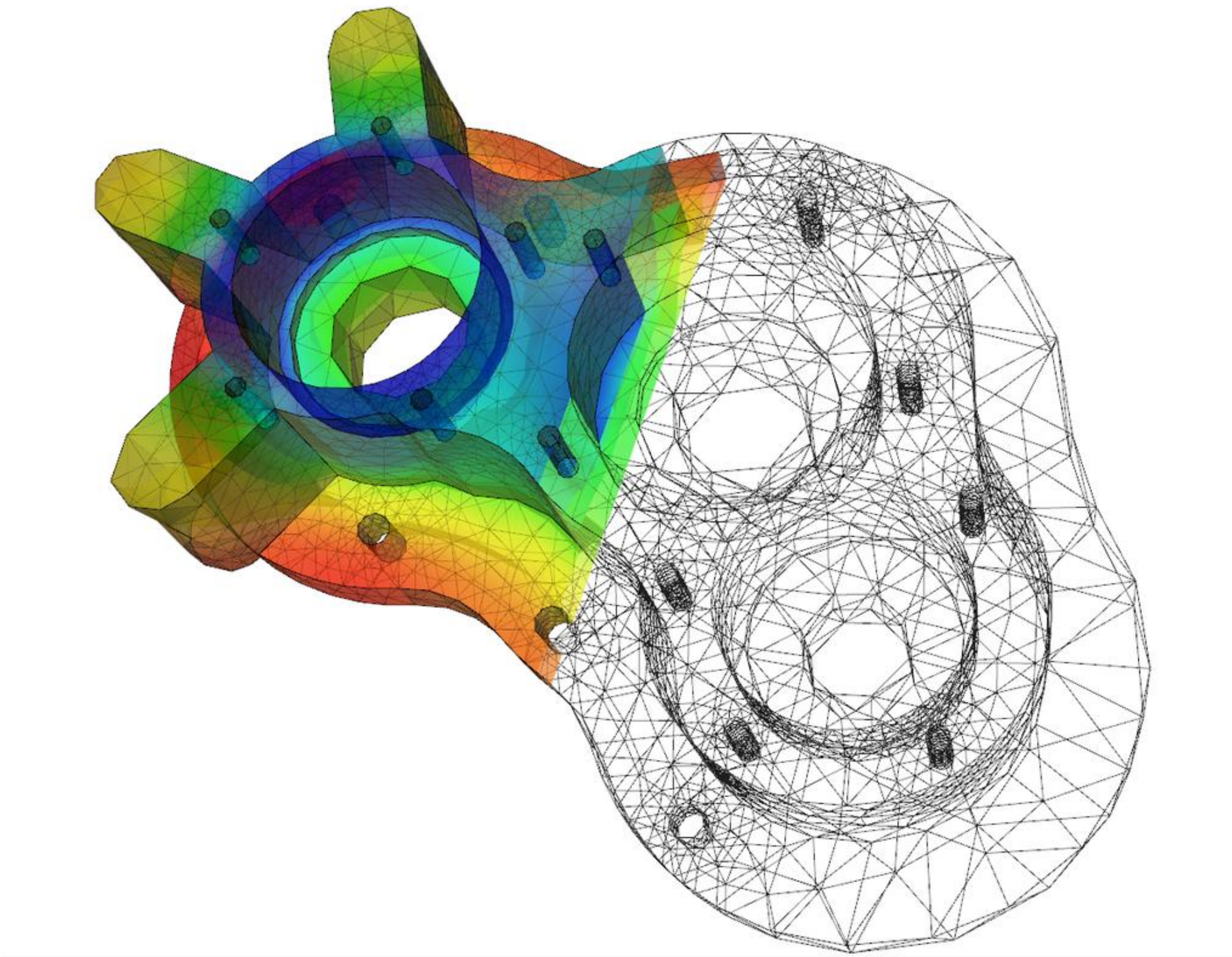
La développée de la développante d'une courbe redonne la courbe d'origine.



Un parallèle peut être fait entre ce théorème et le fait que la *dérivée* (assimilée à la développée) d'une *primitive* (assimilée à une développante) d'une fonction redonne la fonction d'origine alors que la primitive d'une dérivée la redonne à une constante près.

Conception assistée par ordinateur

La conception assistée par ordinateur ou CAO (en anglais, *computer aided design* ou CAD) comprend l'ensemble des logiciels et des techniques de modélisation géométrique permettant de concevoir à l'aide d'un ordinateur des produits manufacturés et les outils pour les fabriquer.

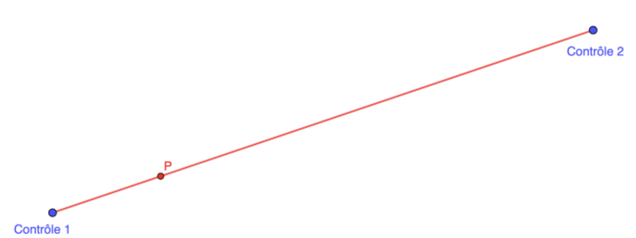


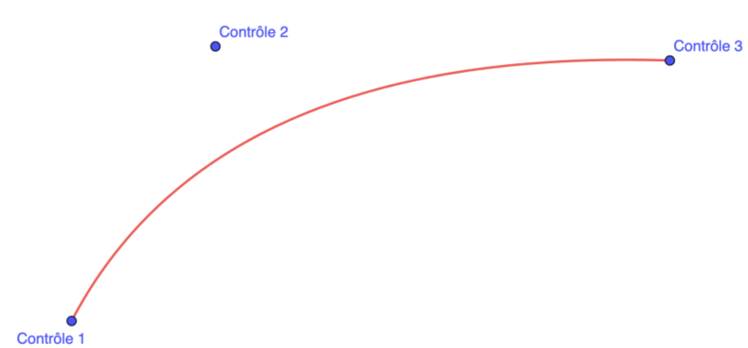
Courbes de Bézier

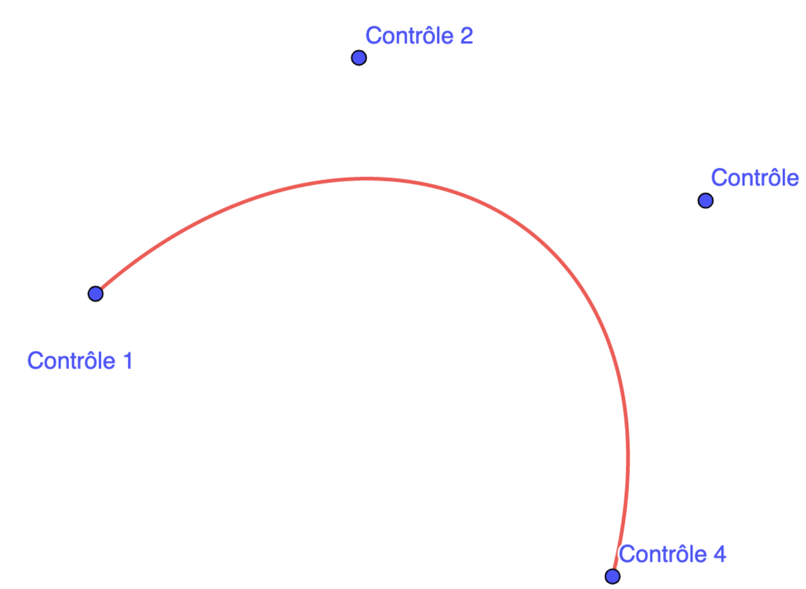
***Principe clé* :** nous remplaçons un objet complexe tel qu'une courbe par un objet plus simple, un ensemble de points de contrôle, de sorte qu'il existe une procédure unique et non ambiguë (*algorithme*) pour reconstruire la courbe à partir de l'ensemble de points de contrôle.

Une courbe de Bézier est définie par un nombre $n+1$ des points $(\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n)$, appelés **points de contrôle**, qui engendrent une portion de courbe. Les types de courbes de Bézier les plus utilisées sont :

- **les courbes de Bézier linéaires** : deux points de contrôle $(n = 1)$;
- **les courbes de Bézier quadratiques** : trois points de contrôle $(n = 2)$;
- **les courbes de Bézier cubiques** : quatre points de contrôle $(n = 3)$.







Théorie générale

La courbe de Bézier pour les $n+1$ points de contrôle $(\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n)$, est l'ensemble des points définis par la représentation paramétrique :

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) \cdot \mathbf{P}_i$$

où $t \in [0;1]$ et les B_i^n sont les *polynômes de Bernstein :*

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

Exemples :

- Pour $n = 2$ on a la courbe de Bézier de degré 2 (quadratique) :

$$P(t) = (1-t)^2 \mathbf{P}_0 + 2(1-t)t\mathbf{P}_1 + t^2 \mathbf{P}_2$$

où $t \in [0;1]$.

- Pour $n = 3$ on a la courbe de Bézier de degré 3 (cubique) :

$$\boxed{P(t) = (1-t)^3 \mathbf{P}_0 + 3(1-t)^2 t\mathbf{P}_1 + 3(1-t)t^2 \mathbf{P}_2 + t^3 \mathbf{P}_3}$$

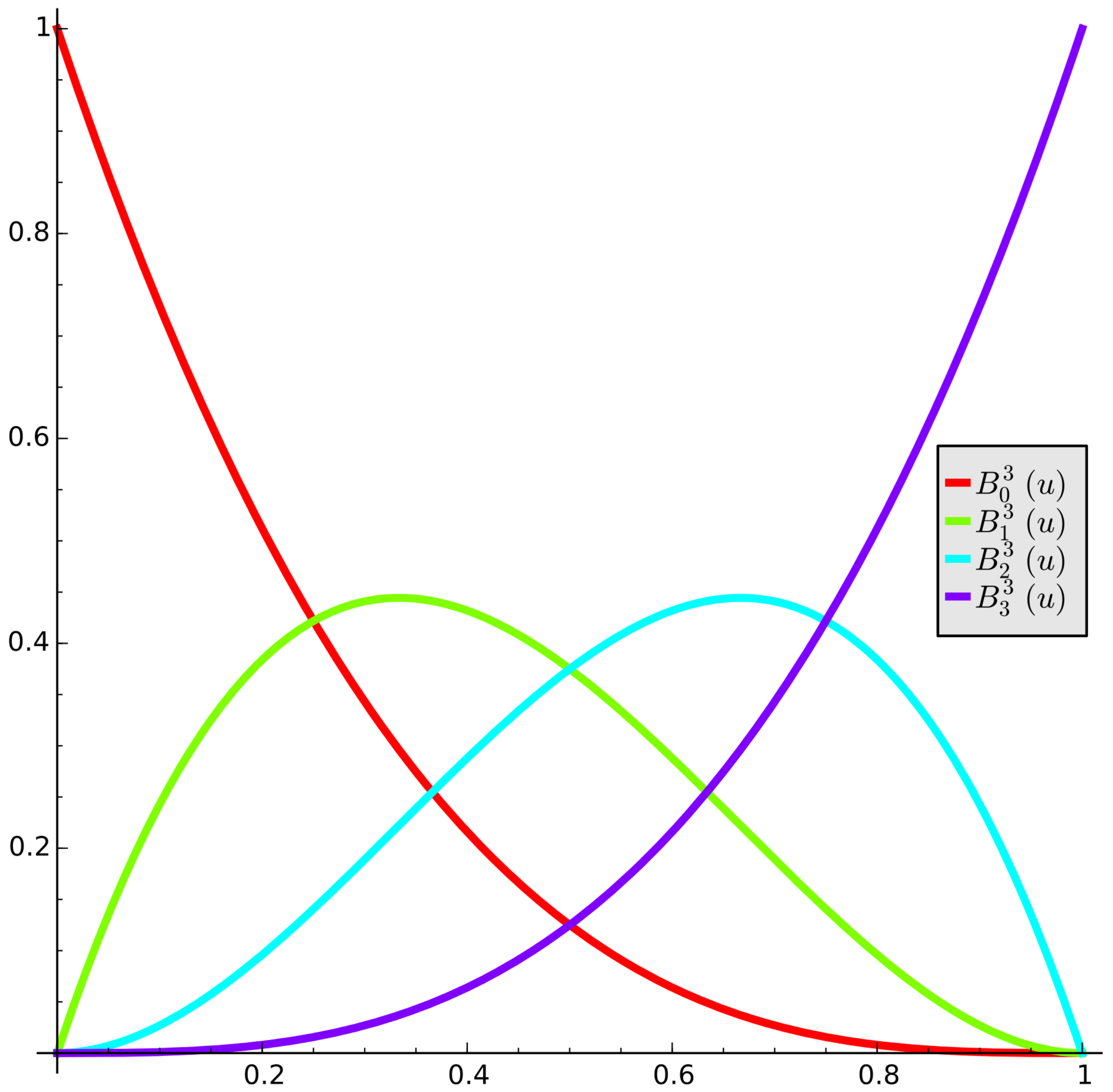
où $t \in [0;1]$.

$P(0) = P_0$

$P(1) = P_3$

https://fr.javascript.info/bezier-curve

Polynômes de Bernstein de degré 3

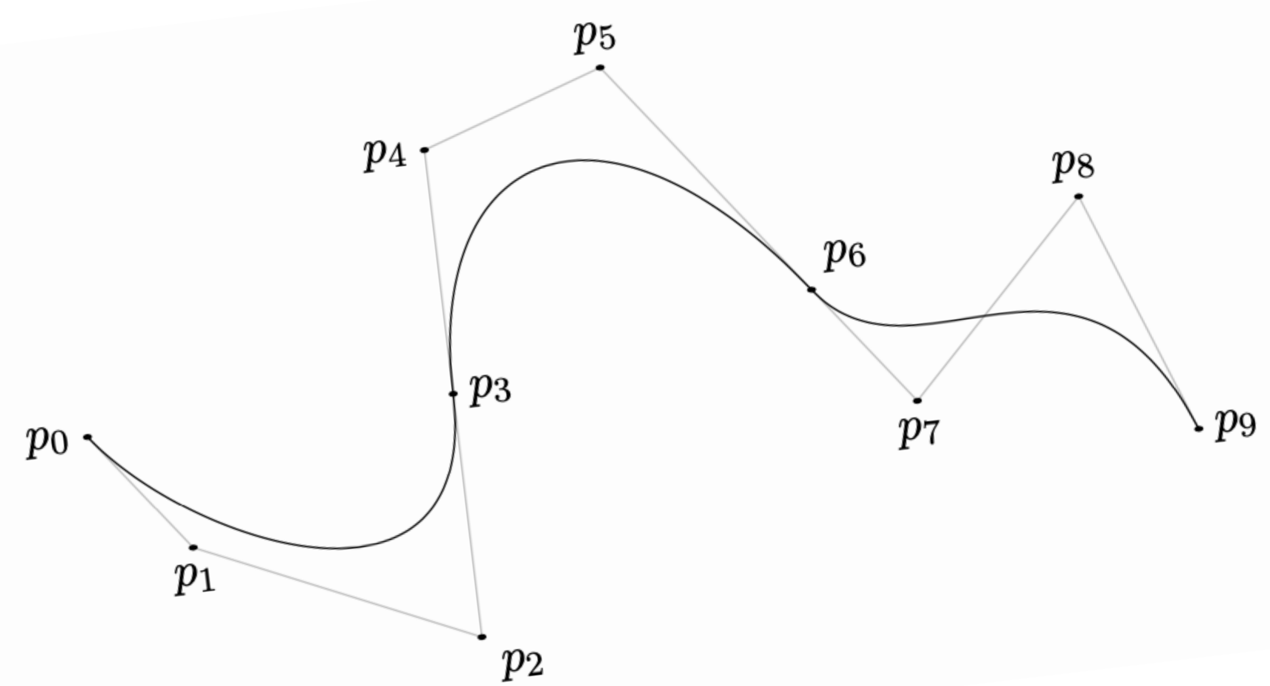


Recollements de courbes de Bézier

- Les courbes de Béziers sont conçues pour être collées les unes aux autres.
- Si on veut recoller n **courbes de Bézier cubiques**, on aura $3n + 1$ points de contrôle : $(\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_{3n})$.
- Les points $(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_6 \dots, \mathbf{P}_{3n})$ par lesquels passe effectivement la courbe sont aussi appelés les **points d'ancrage** de la courbe, les autres points $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5, \dots, \mathbf{P}_{3n-2}, \mathbf{P}_{3n-1})$ seront alors les **points de direction**.

Exemple avec n=3

- La courbe de Bézier cubique γ_1 a les points d'ancrage p_0 et p_3 et les points de direction p_1 et p_2.
- La courbe de Bézier cubique γ_2 a les points d'ancrage p_3 et p_6 et les points de direction p_4 et p_5.
- La courbe de Bézier cubique γ_3 a les points d'ancrage p_6 et p_9 et les points de direction p_7 et p_8.

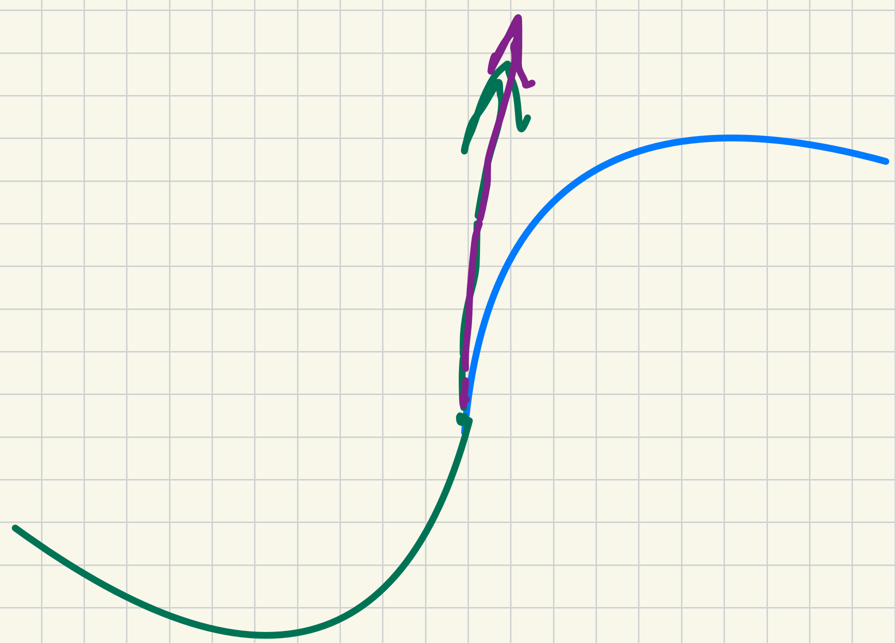


1)

pas lisse

pas C^1

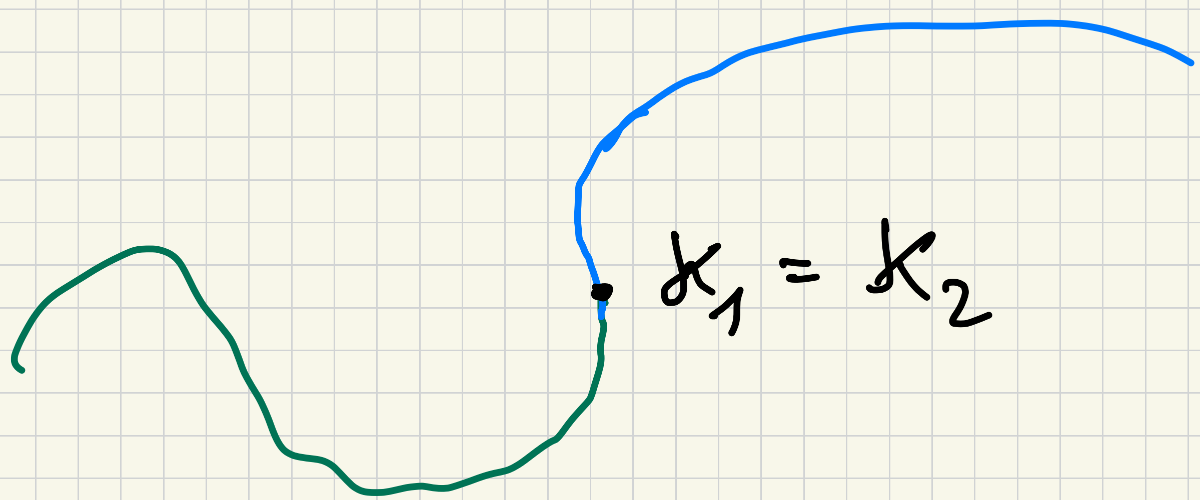
2)



lisse : C^1

pas C^2

3)



C^2

Courbes de Bézier cubiques

La courbe de Bézier cubique pour les 4 points de contrôles $(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$ est donnée par

$$\gamma(t) = (1-t)^3\mathbf{P}_0 + 3(1-t)^2 t\mathbf{P}_1 + 3(1-t)t^2\mathbf{P}_2 + t^3\mathbf{P}_3 \quad ||$$

Le vecteur tangent devient

$$\gamma'(t) = -3(1-t)^2\mathbf{P}_0 + 3[(1-t)^2 - 2t(1-t)]\mathbf{P}_1 + 3[2t(1-t) - t^2]\mathbf{P}_2 + 3t^2\mathbf{P}_3 \quad || \qquad t \in [0,1]$$

et au début et à la fin de la courbe on a

$$3\overrightarrow{P_0P_1} = \boxed{\gamma'(0) = -3\mathbf{P}_0 + 3\mathbf{P}_1 = 3(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)} \quad \text{et} \quad \boxed{\gamma'(1) = -3\mathbf{P}_2 + 3\mathbf{P}_3 = 3(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2)} = 3\overrightarrow{P_2P_3}$$

Si on veut recoller 2 courbes de Bézier cubiques γ_1 et γ_2 déterminées par 7 points de contrôles:

$(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$ pour γ_1

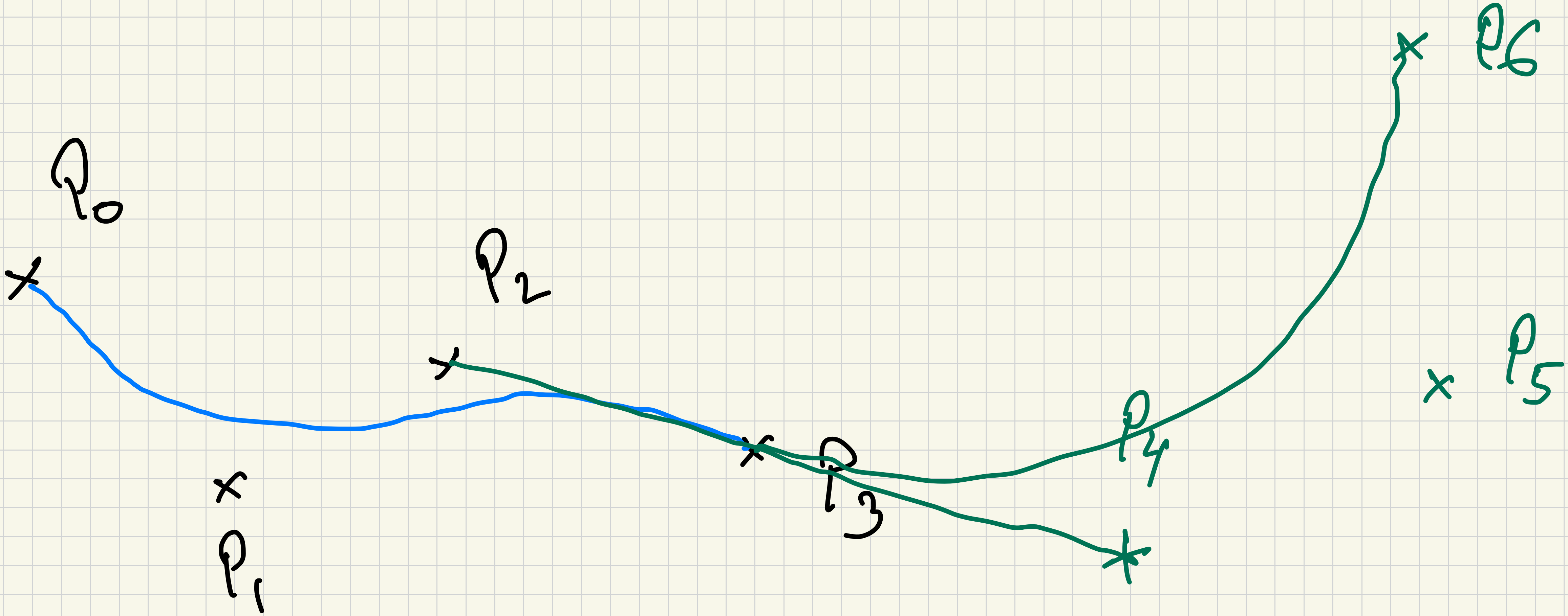
$(\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_6)$ pour γ_2

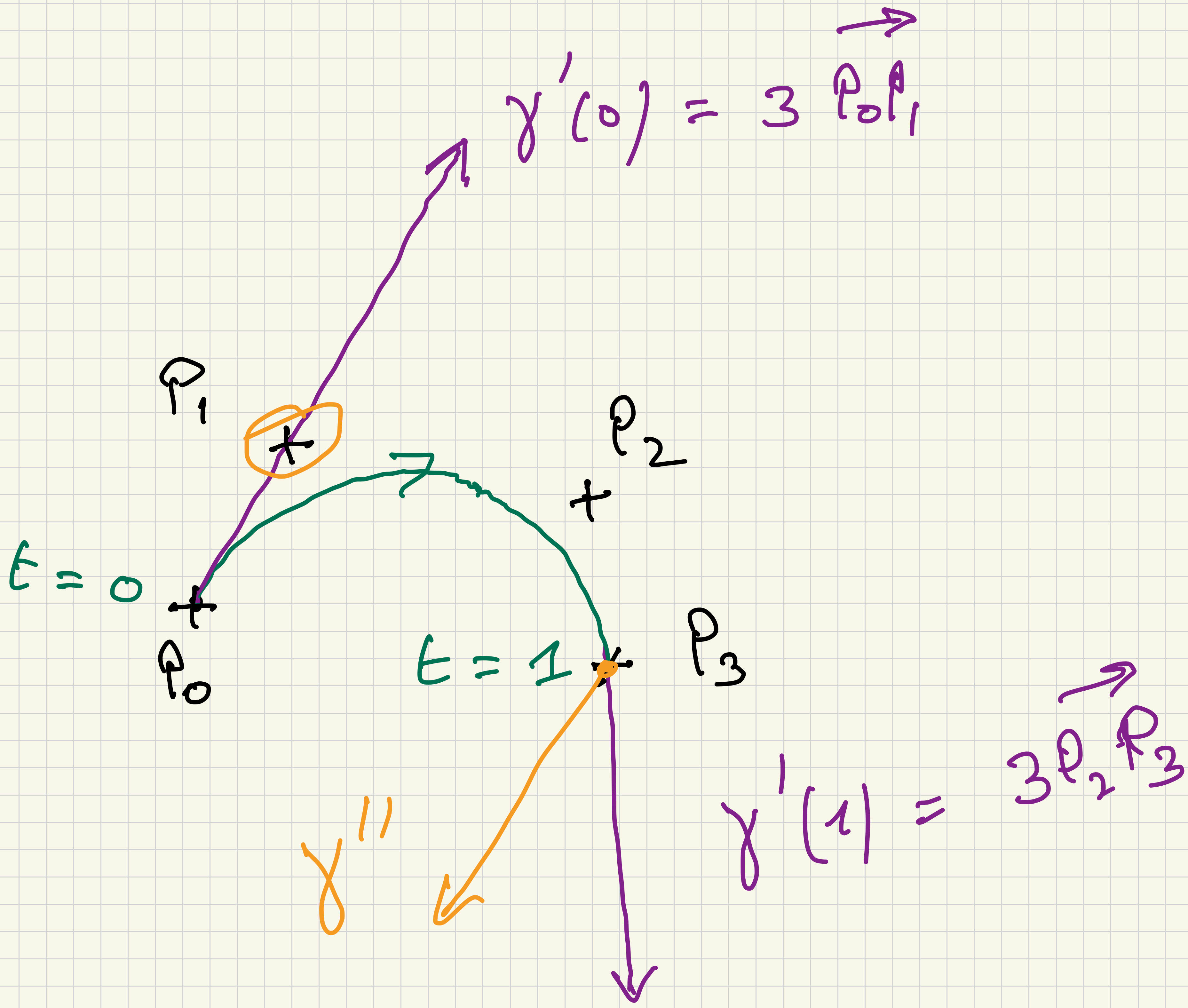
Alors pour que le **recollement soit lisse**, on impose que le vecteur tangent $\gamma_1'(1)$ soit égal au vecteur tangent $\gamma_2'(0)$.

Ceci impose que $\boxed{\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_3}$

Autrement dit, pour que la courbe totale (réunion des courbes γ_1 et γ_2) soit lisse, il faut choisir $\mathbf{P}_2$ et $\mathbf{P}_4$ de telle sorte que $\mathbf{P}_3$ soit le milieu du segment $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_4$ donc

Continuité des vecteurs tangents (I) : $\boxed{\boldsymbol{P_4 = 2P_3 - P_2}}$ $\quad$ (I) $\quad P_7 = 2P_6 - P_5$


P0
P1
P2
P3
P4
P5
P6



γ'' dépend de P_3, P_2 et P_1

Courbes de Bézier cubiques

La courbe de Bézier cubique pour les 4 points de contrôles $(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$ est donnée par

$$\gamma(t) = (1-t)^3\mathbf{P}_0 + 3(1-t)^2 t\mathbf{P}_1 + 3(1-t)t^2\mathbf{P}_2 + t^3\mathbf{P}_3$$

En dérivant deux fois $\gamma(t)$ on peut montrer que

$$\boxed{\gamma''(0) = 6\mathbf{P}_0 - 12\mathbf{P}_1 + 6\mathbf{P}_2} \qquad \boxed{\gamma''(1) = 6\mathbf{P}_1 - 12\mathbf{P}_2 + 6\mathbf{P}_3}$$

On veut recoller 2 courbes de Bézier cubiques γ_1 et γ_2 déterminées par 7 points de contrôles:

$(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$ pour γ_1

$(\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_6)$ pour γ_2

Pour que le **recollement est la même courbure au point P_3**, on impose que le vecteur $\gamma_1''(1)$ soit égal au vecteur $\gamma_2''(0)$.

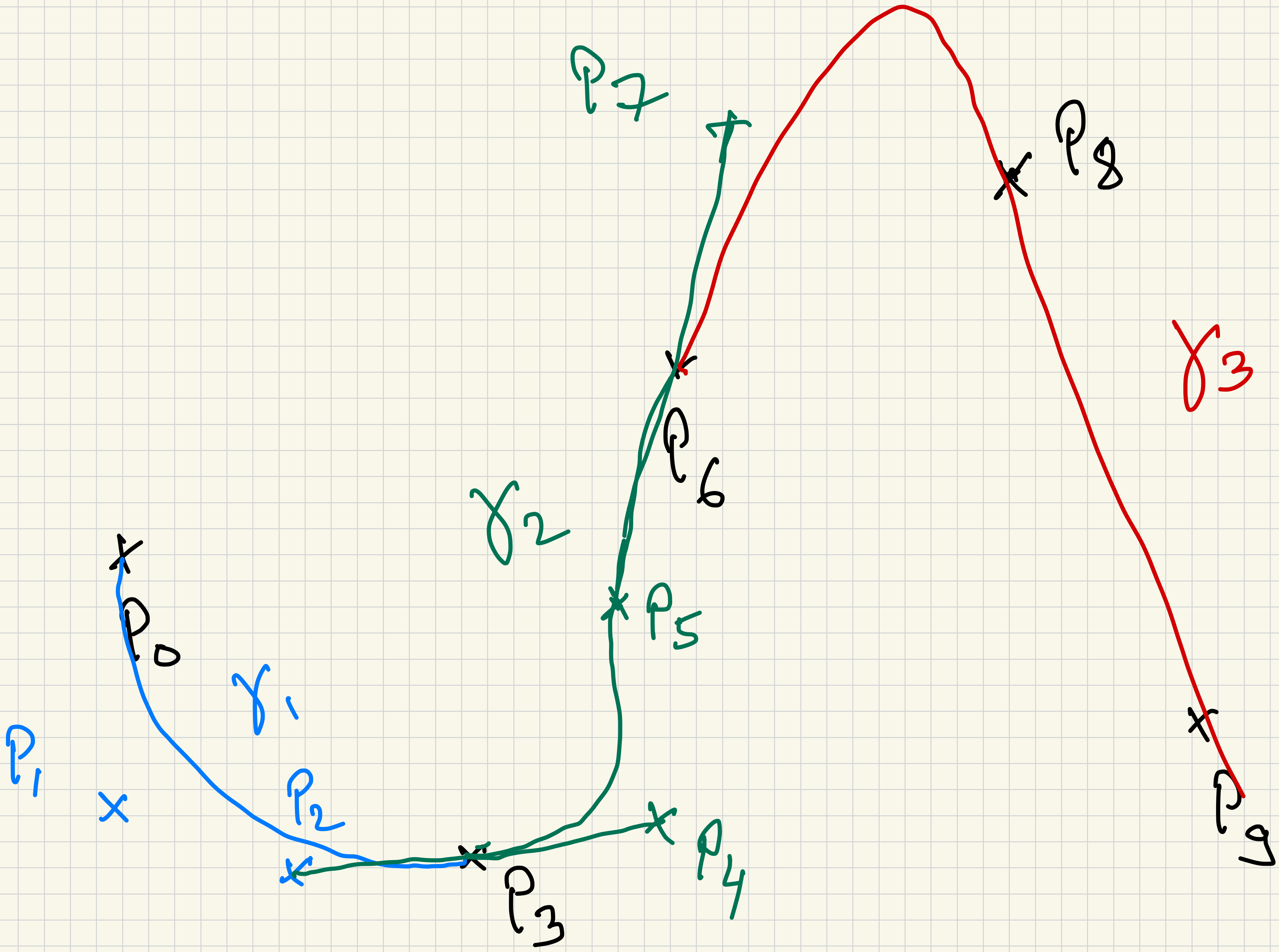
Ceci impose que $\mathbf{P}_1 - 2\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3 - 2\mathbf{P}_4 + \mathbf{P}_5$ et donc

Continuité de la courbure (II): (II) $\mathbf{P}_5 = 2\mathbf{P}_4 - 2\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_1$ $\quad P_8 = 2P_7 - 2P_5 + P_4$

En mettant ensemble les conditions (I) et (II), on constate que, pour des points donnés $\boldsymbol{P_0}, \boldsymbol{P_3}, \boldsymbol{P_6}, \boldsymbol{P_9}, \ldots$,dès que les points de directions $\boldsymbol{P_1}$ et $\boldsymbol{P_2}$ sont fixés les autres points de directions sont imposés par

(I)	$\mathbf{P}_4 = 2\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2$	et	(II)	$\mathbf{P}_5 = 2\mathbf{P}_4 - 2\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_1$
puis (I)	$\mathbf{P}_7 = 2\mathbf{P}_6 - \mathbf{P}_5$	et	(II)	$\mathbf{P}_8 = 2\mathbf{P}_7 - 2\mathbf{P}_5 + \mathbf{P}_4$

On obtient les formules suivantes $\quad \mathbf{P}_{3k+1} = 2\mathbf{P}_{3k} - \mathbf{P}_{3k-1}$ et $\mathbf{P}_{3k+2} = 2\mathbf{P}_{3k+1} - 2\mathbf{P}_{3k-1} + \mathbf{P}_{3k-2}$



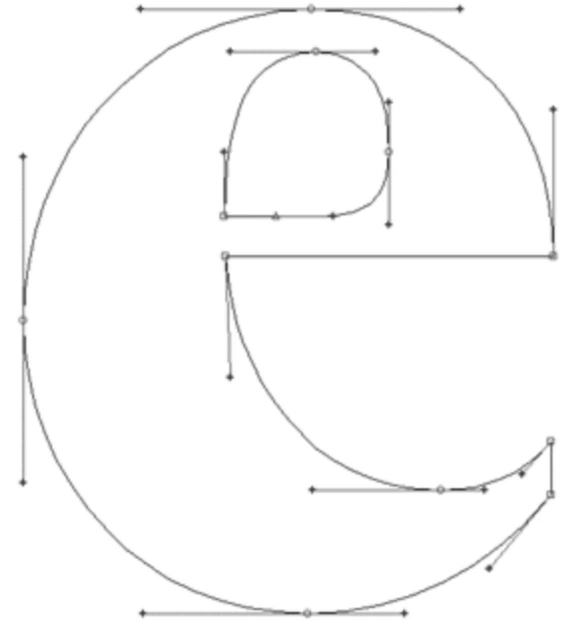
p_7
p_8
γ_3
p_6
γ_2
p_5
p_0
γ_1
p_1
p_2
p_3
p_4
p_9

Généralisation

Les courbes de Bézier possèdent un certain nombre de défauts :

- Si on déplace un point de contrôle, toute la courbe en sera modifiée.
- La courbe *ne passe pas* nécessairement par tous les points de contrôle, ce qui peut rendre son contrôle délicat.
- Le cercle ne peut pas être reproduit exactement en recollant des morceaux de courbes de Bézier.

Pour toutes ces raisons, ces courbes ont subi de nombreuses généralisations : *courbes de Bézier rationnelles*, *B-splines*, *Nurbs*, *etc…*

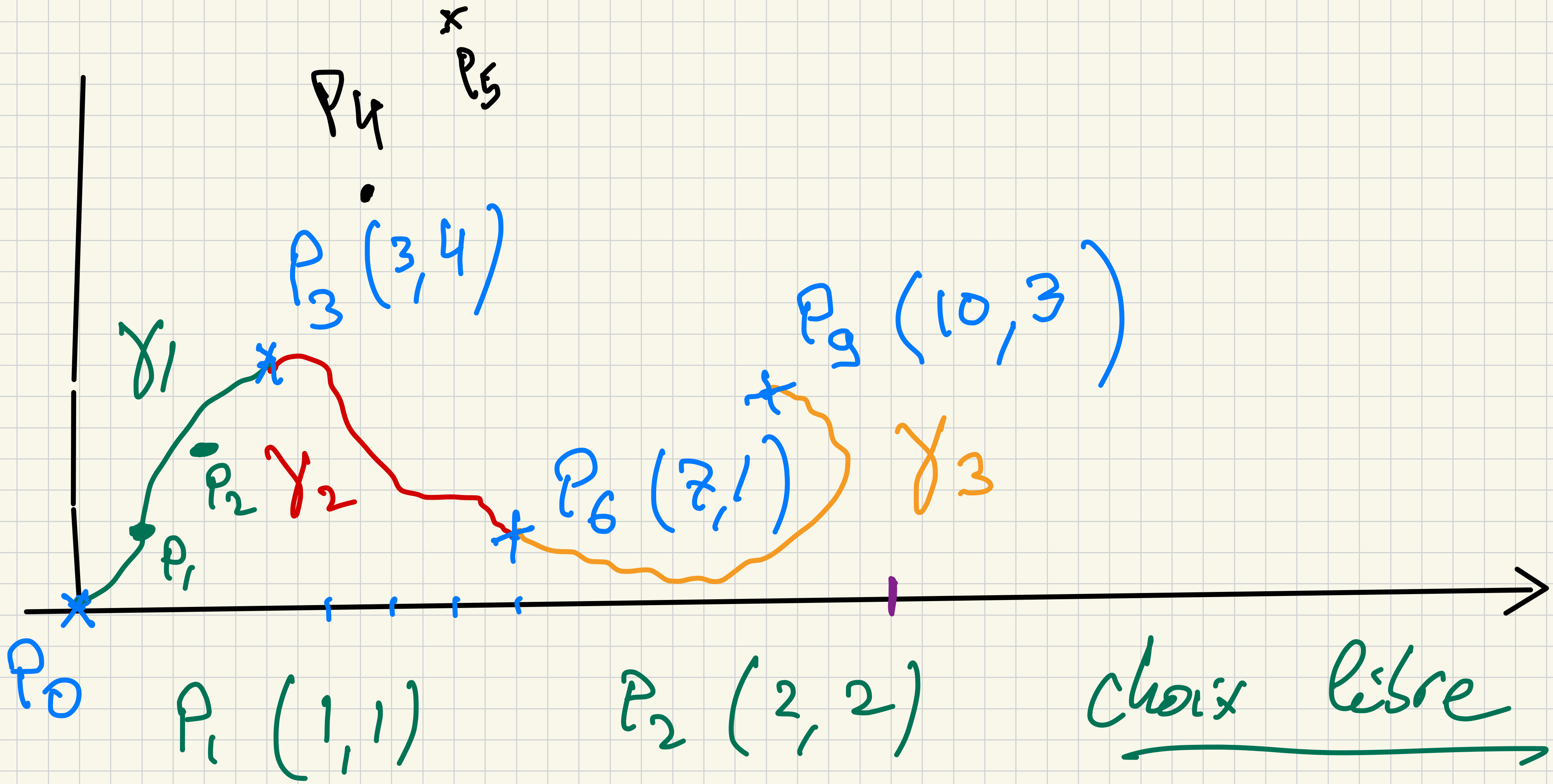


Exemple

On veut faire passer une courbe de Bézier cubique par les points d'ancrage $P_0(0,0)$, $P_3(3,4)$, $P_6(7,1)$ et $P_9(10,3)$ Choisir les points de direction P_1 P_2 P_4 P_5 P_7 et P_8 de façon à que le recollement des 3 courbes soit le plus lisse possible (dérivées secondes continues)

Puis calculer les 2 courbes de Béziers γ_1 et γ_2 pour les points P_0 à P_6 (on ne calculera pas la 3ème courbe) et vérifier que l'on a bien en P_3

$$y_1'(1) = y_2'(0) \qquad \text{et} \qquad y_1''(1) = y_2''(0)$$



$$(\mathrm{I})\quad P_4 = 2P_3 - P_2 = (6,8) - (2,2) = (4,6)$$

$$(\mathrm{II})\quad P_5 = 2P_4 - 2P_2 + P_1 = (5,9)$$

$$(\mathrm{I})\quad P_7 = 2P_6 - P_5 = (14,2) - (5,9) = \underline{\underline{(9,-7)}}$$

$$(\mathrm{II})\quad P_8 = 2P_7 - 2P_5 + P_4 = (12,-26)$$

Courbe de Bézier

$\gamma_1 : \quad P_0(0,0) \quad P_1(1,1)$

$\qquad P_2(2,2) \quad P_3(3,4)$

$$\gamma_1(t) = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 \cdot t\, P_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 \cdot P_3$$

$$= \left(1 + 3t^2 - 3t - t^3\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3t\left(1 - 2t + t^2\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$+ 3t^2(1-t)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t^3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ t^3 + 3t \end{pmatrix}$$

$\gamma_1(0) = (0,0) = P_0$ ✓

$\gamma_1(1) = (3,4) = P_3$ ✓

$$\gamma_1'(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3t^2 + 3 \end{pmatrix} \qquad \gamma_1'(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_1''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6t \end{pmatrix} \qquad \gamma_1''(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Course γ_2 : $P_3(3,4)$ $P_4(4,6)$ $P_5(5,9)$ $P_6(7,1)$

$$\gamma_2(t) = (1-t)^3 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 3(1-t)^2 t \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} + 3(1-t)t^2 \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$+ t^3 \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 + 3t + 3 \\ -12t^3 + 3t^2 + 6t + 4 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_2(0) = (3,4) = P_3 \qquad \gamma_1'(1)$$

$$\gamma_2(1) = (7,1) = P_6 \qquad \parallel$$

$$\gamma_2'(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 + 3 \\ -36t^2 + 6t + 6 \end{pmatrix} \qquad \gamma_2'(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_2''(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ -72t + 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma_2''(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$= \gamma_1''(1)$$