

ARE YOU A 90° ANGLE?
BECAUSE YOU'RE LOOKING RIGHT.

Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Fonctions trigonométriques

Philippe Chabloz

Séances d'aide

Lundi de 17h30 à 19h⁰⁰

Salle CM 1 104

Avec 2 assistantes de cours

Uniquement pour AR Ba 1.

Somme et séries

$$\sum_{k=0}^3 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 15$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots = +\infty$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = +\infty$$

diverge

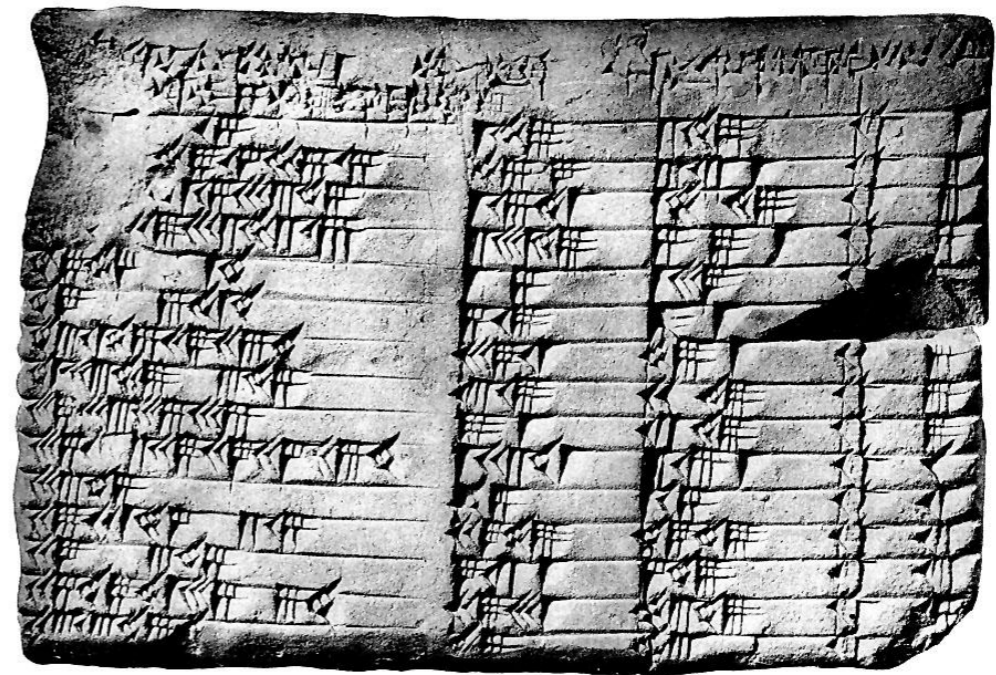
$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} \quad \text{si } |r| < 1$$

Série géométrique de
raison r

Un peu d'histoire

Le mot trigonométrie est dérivé des trois mots grecs : *tri* (trois), *gonôs* (angles) et *metron* (mesure).

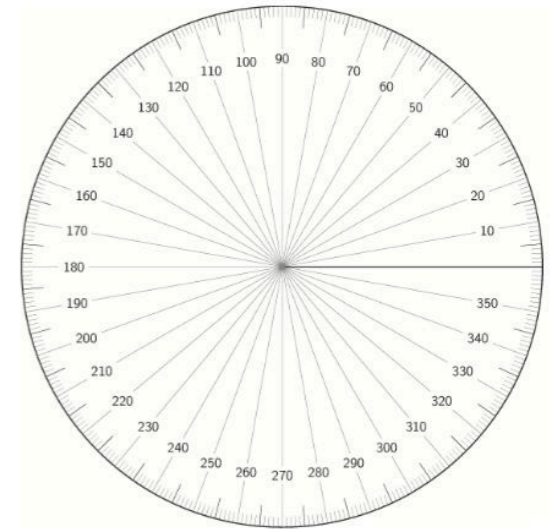
- ❖ Les origines de la trigonométrie remontent aux civilisations d'Égypte antique, il y a plus de 4000 ans.
- ❖ Les Babyloniens ont basé la trigonométrie sur un système numérique à base 60.
- ❖ Redécouverte et développée par les mathématiciens Grecs.



Plimpton 322

Pourquoi 360° ?

- ❖ Diviser un cercle en 360 parties, permettant ainsi de définir le **degré**, est une excellente idée qu'a eue un illustre Babylonien il y a environ 4000 ans : *Hipparque de Nicée*.
- ❖ Le nombre 360 admet un grand nombre de diviseurs (1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180 et 360), et les Babyloniens comptaient en base 60.
- ❖ *Ptolémée* affine le système en faisant intervenir les deux décimales suivantes en base soixante : les **minutes** (dénnotée par ') et les **secondes** (dénnotée par "). Par exemple, un angle de $27^{\circ}12'$ correspond à $27,2^{\circ}$.
- ❖ 1° est un petit angle, mais un angle encore facilement mesurable à l'oeil : le diamètre angulaire de la Lune et du Soleil sont proches de $0,5^{\circ}$ (donc $30'$).

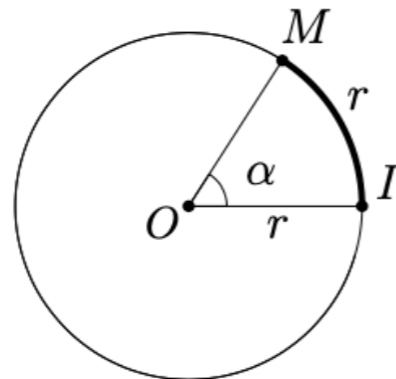


Hipparque
2e siècle avant J-C

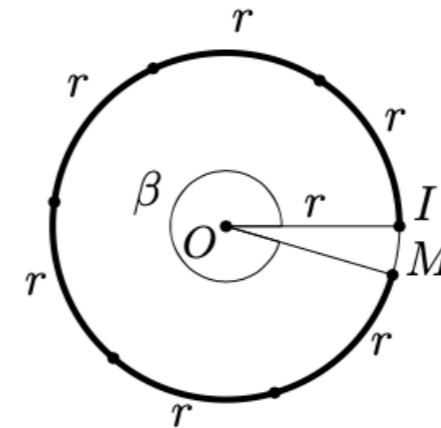
Le radian

Un radian est la mesure d'un angle au centre interceptant un arc de cercle de longueur égale au rayon de ce cercle.

[Une première animation](#)



$$\alpha = 1 \text{ radian}$$



$$\beta = 6 \text{ radians}$$

Le *périmètre* d'un cercle de rayon r vaut $2\pi \cdot r$. Il s'en suit que la mesure en radians «d'un tour complet» (360°) vaut 2π .

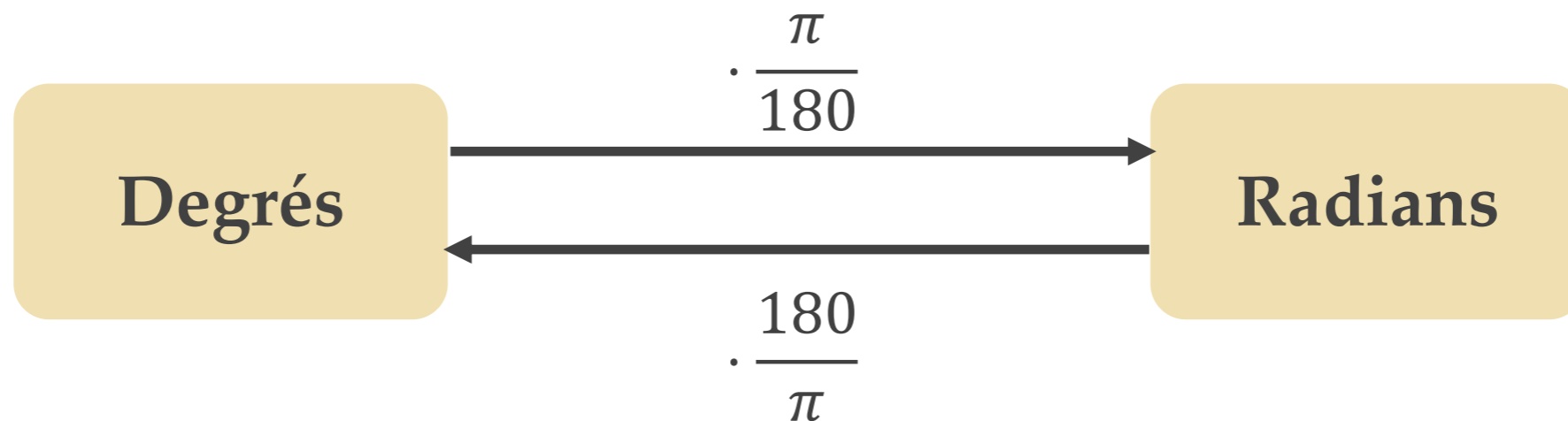
Relation entre degrés et radians

- ❖ En notant par α_{rad} et α_{deg} les mesures d'un angle orienté en radians et en degrés respectivement, nous obtenons la relation :

$$\frac{\alpha_{rad}}{2\pi} = \frac{\alpha_{deg}}{360}$$

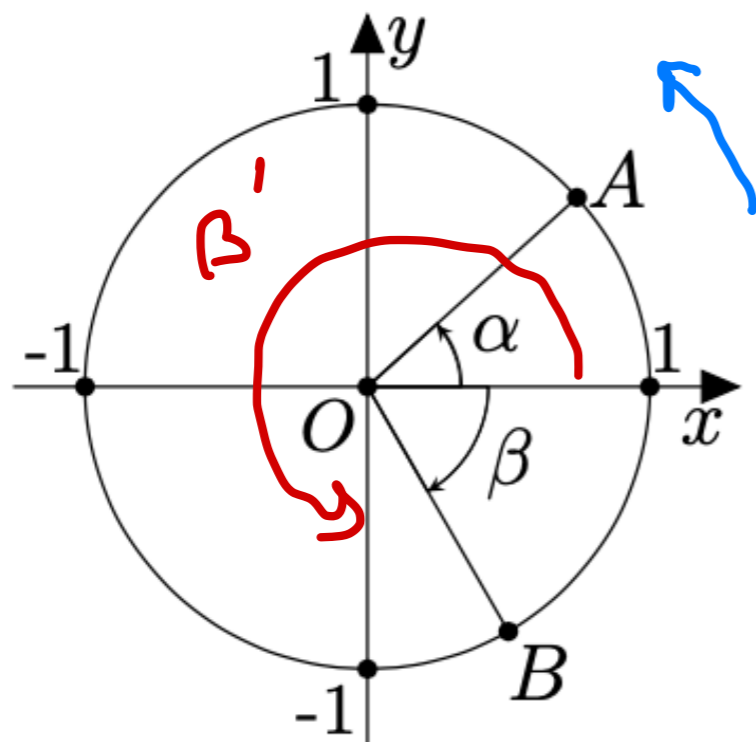
- ❖ Ainsi :

$$360^\circ = 2\pi rad$$



Le cercle trigonométrique

- ❖ Le **cercle trigonométrique** est un cercle de rayon 1 muni d'un système d'axes perpendiculaires Ox et Oy dont l'origine est le centre O du cercle. Les **angles orientés** y sont toujours représentés depuis la partie positive de l'axe horizontal Ox et en tournant dans le sens trigonométrique (= le **sens inverse des aiguille d'une montre !!**)
- ❖ On associe à chaque angle un point sur le cercle trigonométrique.
- ❖ Cependant, **cette association n'est pas injective** : des angles différents peuvent mener au même point si leur différence est un multiple de 2π .

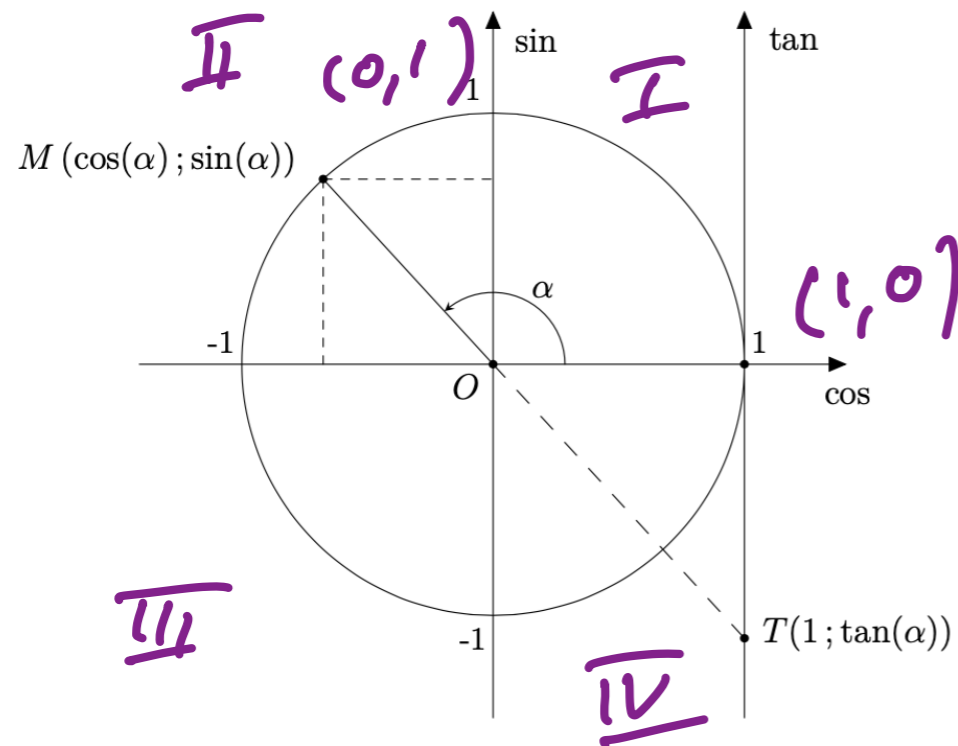


Par exemple :

- Le point A est associé à l'angle $\alpha = 52^\circ$
- L'angle $\beta = -\pi/3$ est associé au point B

$$\beta' = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

Les fonctions trigonométriques



- ❖ Le cosinus de α , noté $\cos(\alpha)$, est l'abscisse de M .
- ❖ Le sinus de α , noté $\sin(\alpha)$, est l'ordonnée de M .
- ❖ La tangente de α , noté $\tan(\alpha)$, est l'ordonnée de T , où T est le point d'intersection de la droite OM avec la tangente au cercle au point $(1; 0)$.

[Une deuxième animation](#)

❖ $\sin(0) = 0$ et $\cos(0) = 1$

❖ $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

❖ $\sin(\pi) = 0$ et $\cos(\pi) = -1$

❖ $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

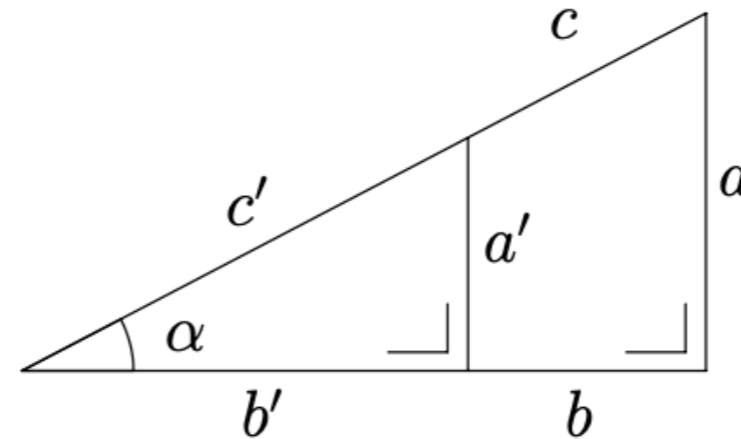
Triangle rectangle

Dans un triangle rectangle, les rapports de deux côtés ne dépendent que de l'angle α .

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$



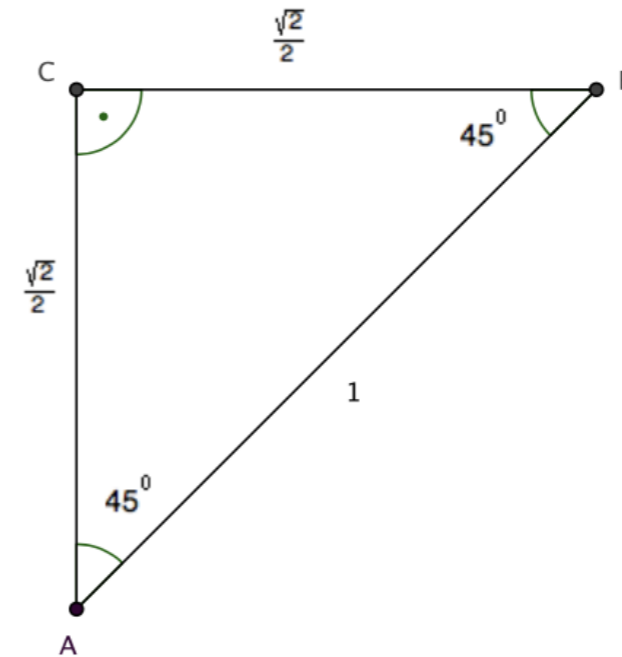
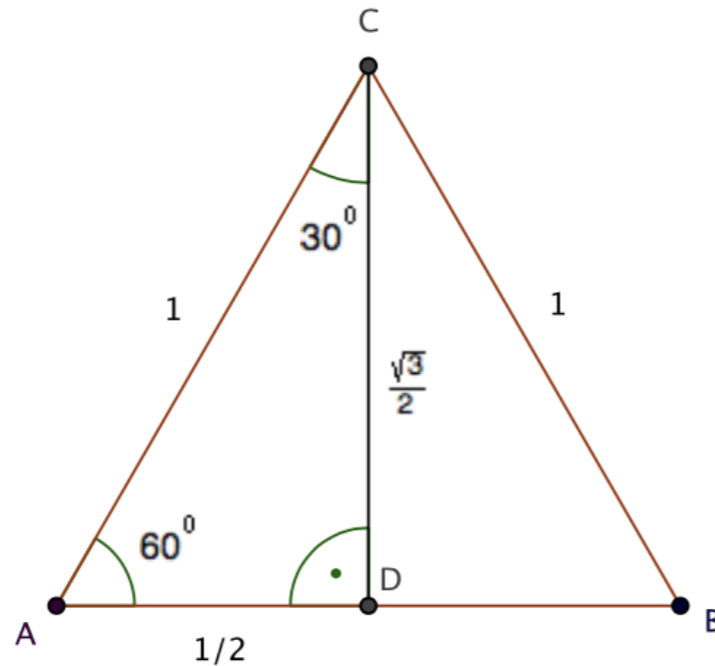
Par conséquent, on définit les **rapports trigonométriques** suivants :

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{a}{b}$$

Triangles équilatéral et isocèle



$$\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(60^\circ) = \sqrt{3}$$

$$\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$$

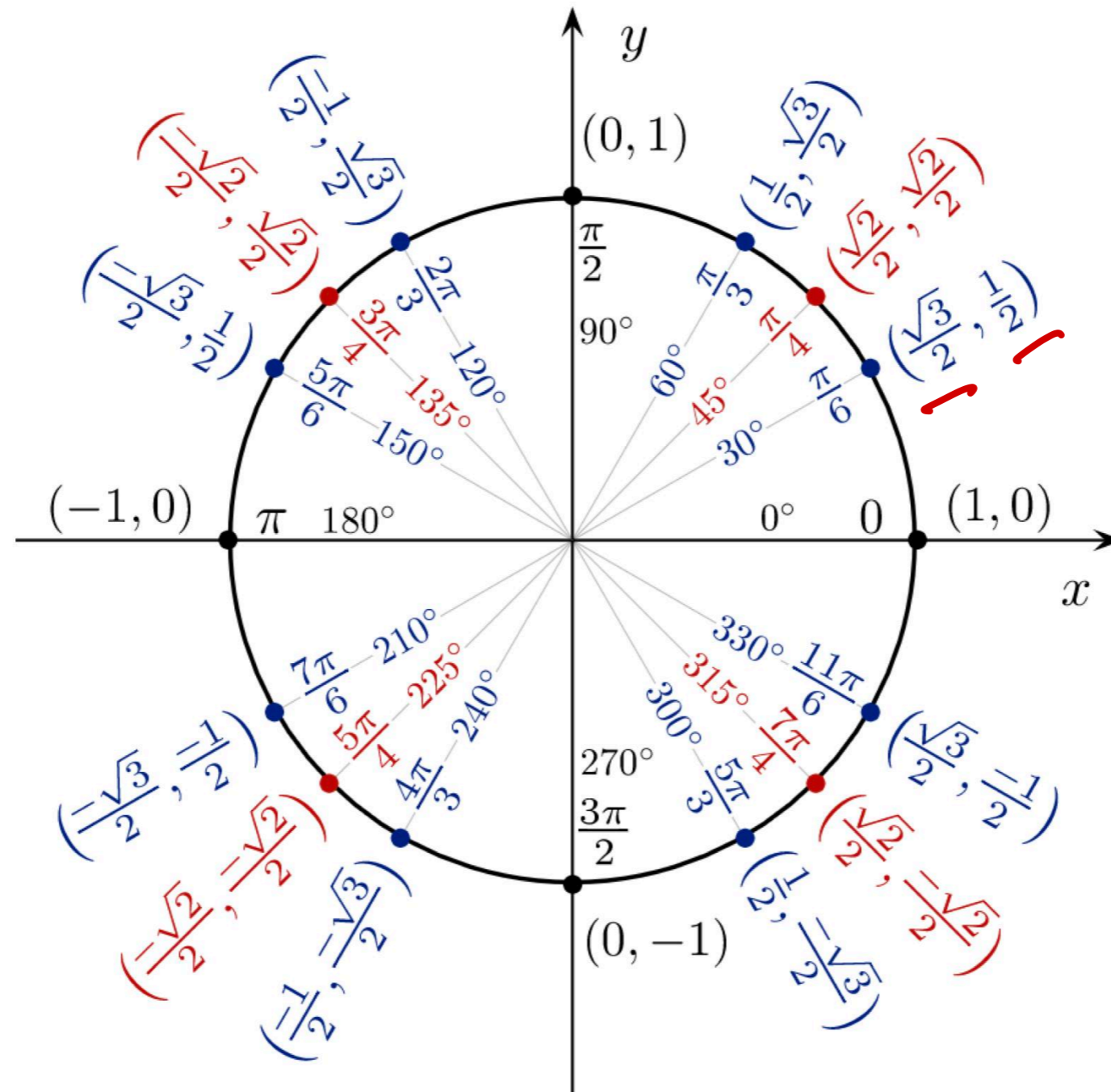
$$\tan(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan(45^\circ) = 1$$

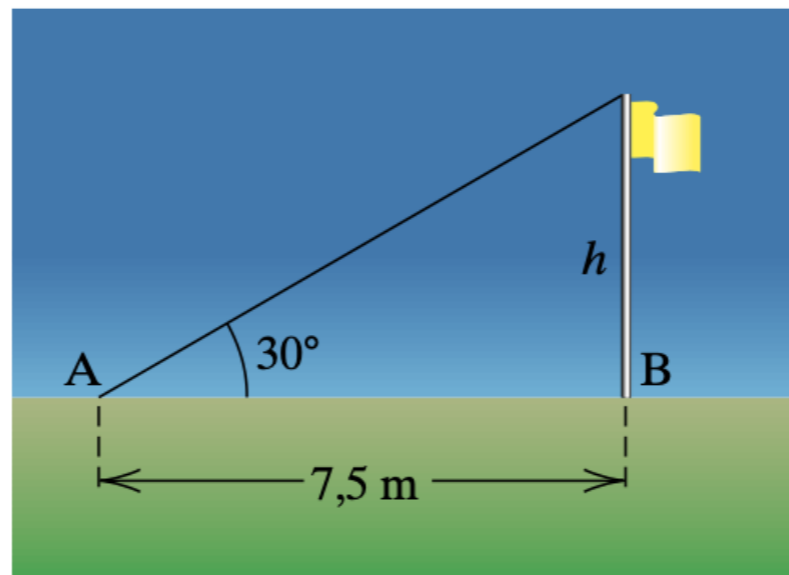
Angles remarquables



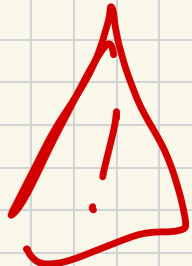
$$\tan(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Exercice

Un géomètre observe qu'en un point A, placé au niveau du sol à une distance de 7,5 m de la base B d'un mât, l'angle entre le sol et le sommet du mât est 30° . Calculer la hauteur h du mât arrondie au dixième de centimètre.



$$\begin{aligned}\tan(30^\circ) &= \frac{h}{7,5} \Rightarrow h = 7,5 \cdot \tan(30^\circ) \\ &= 7,5 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 4,33 \text{ m.}\end{aligned}$$

$$\alpha = 24^{\circ} 30' = 24 + \frac{30'}{60'} = 24,5^{\circ}$$


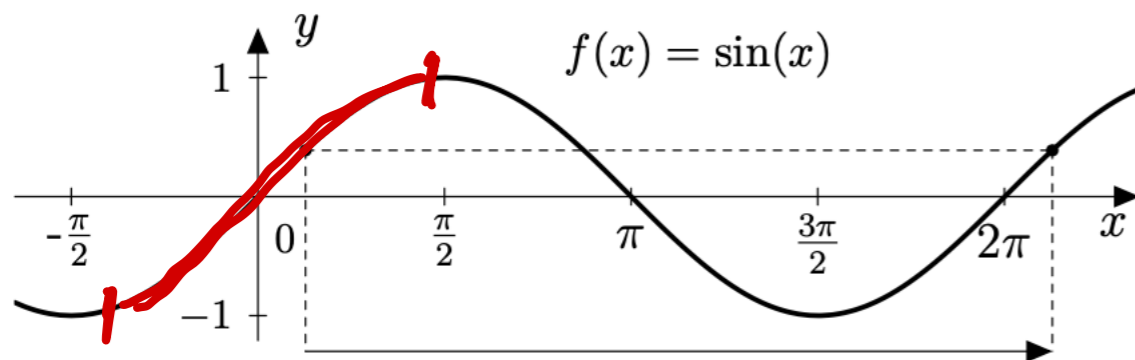
$$\alpha = 40^{\circ} 10' 20'' = 40 + \frac{10}{60} + \frac{20}{3600}$$

1 degré est divisé en $60'$ (minutes d'arc)
et 1 minute d'arc est en $60''$ (seconde d'arc)

Graphes de fonctions trigonométriques

Graphes des fonctions trigonométriques : sinus et cosinus

Nous nous servons d'un système d'axes orthonormés dans lequel nous portons en abscisse les mesures en radians (éventuellement en degrés) des angles.



- ❖ On peut constater que les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques** de période 2π :

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

Autres propriétés :

- ❖ Les fonctions sinus et cosinus prennent des valeurs entre -1 et 1 :

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \text{ et } -1 \leq \cos(x) \leq 1.$$

- ❖ Le sinus est une fonction **impair** car

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

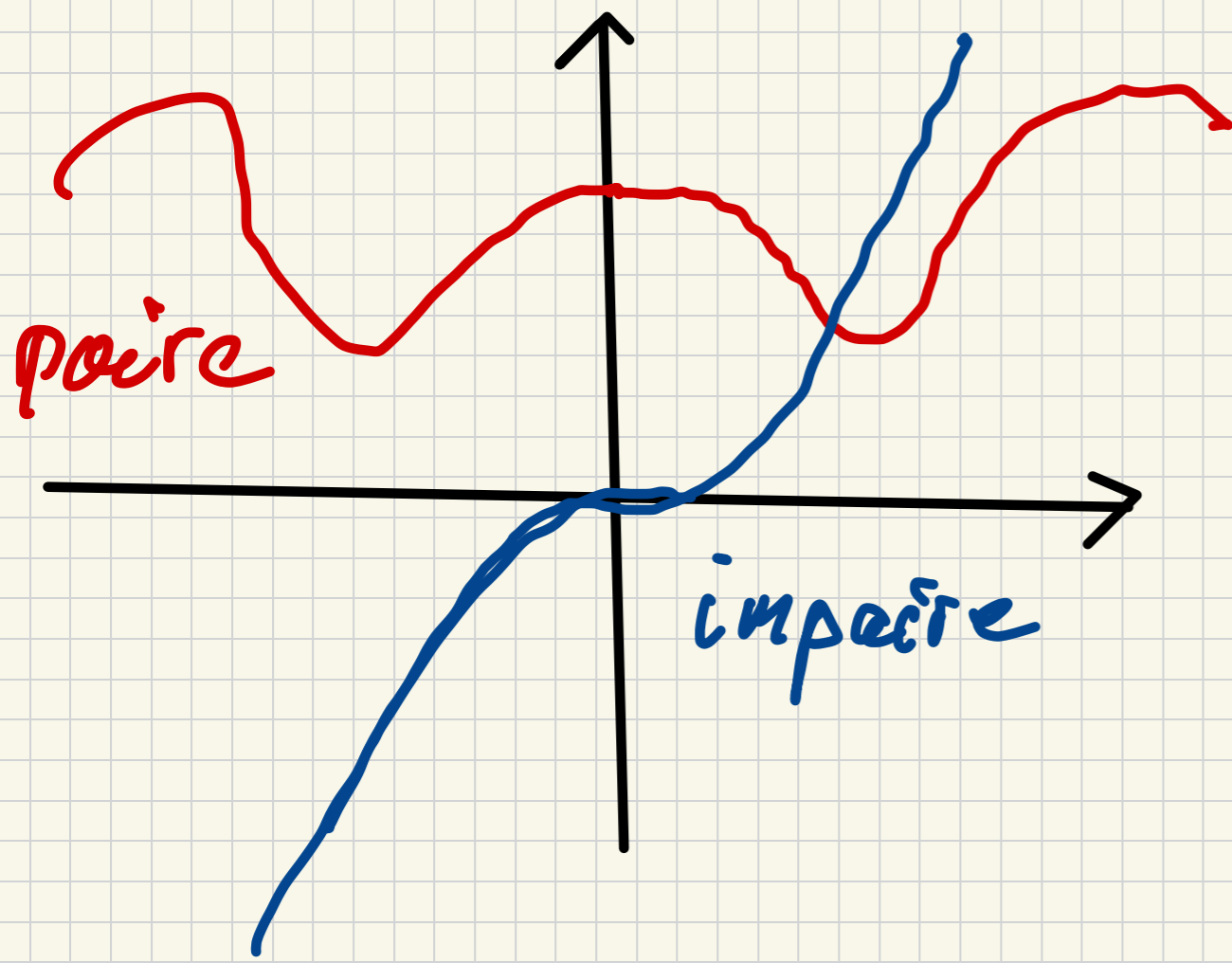
- ❖ Le cosinus est une fonction **pair** car

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

↷ = partie pour inverser les fonctions

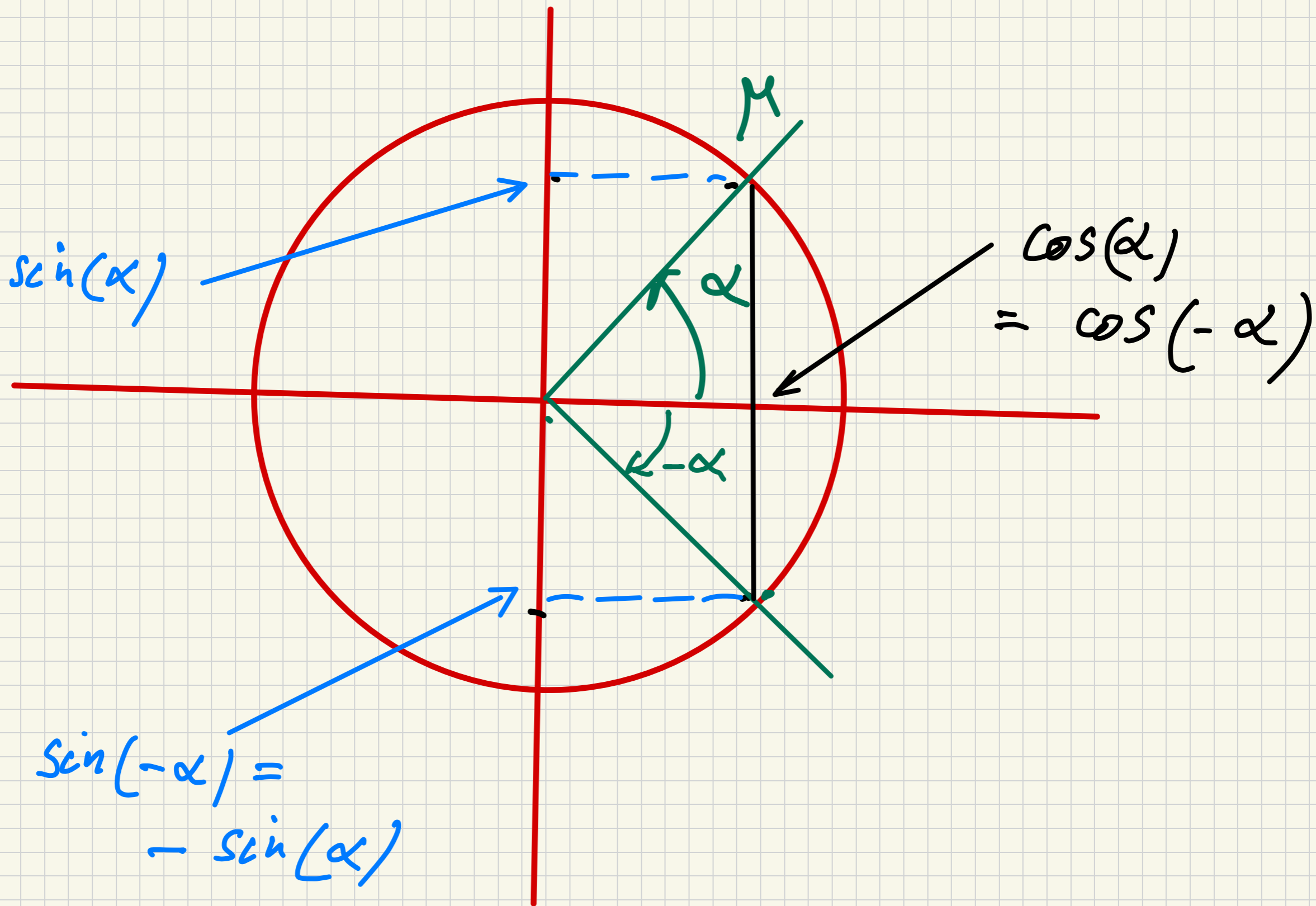
Une fonction f est dite

- paire si $f(x) = f(-x)$
- impaire si $f(-x) = -f(x)$

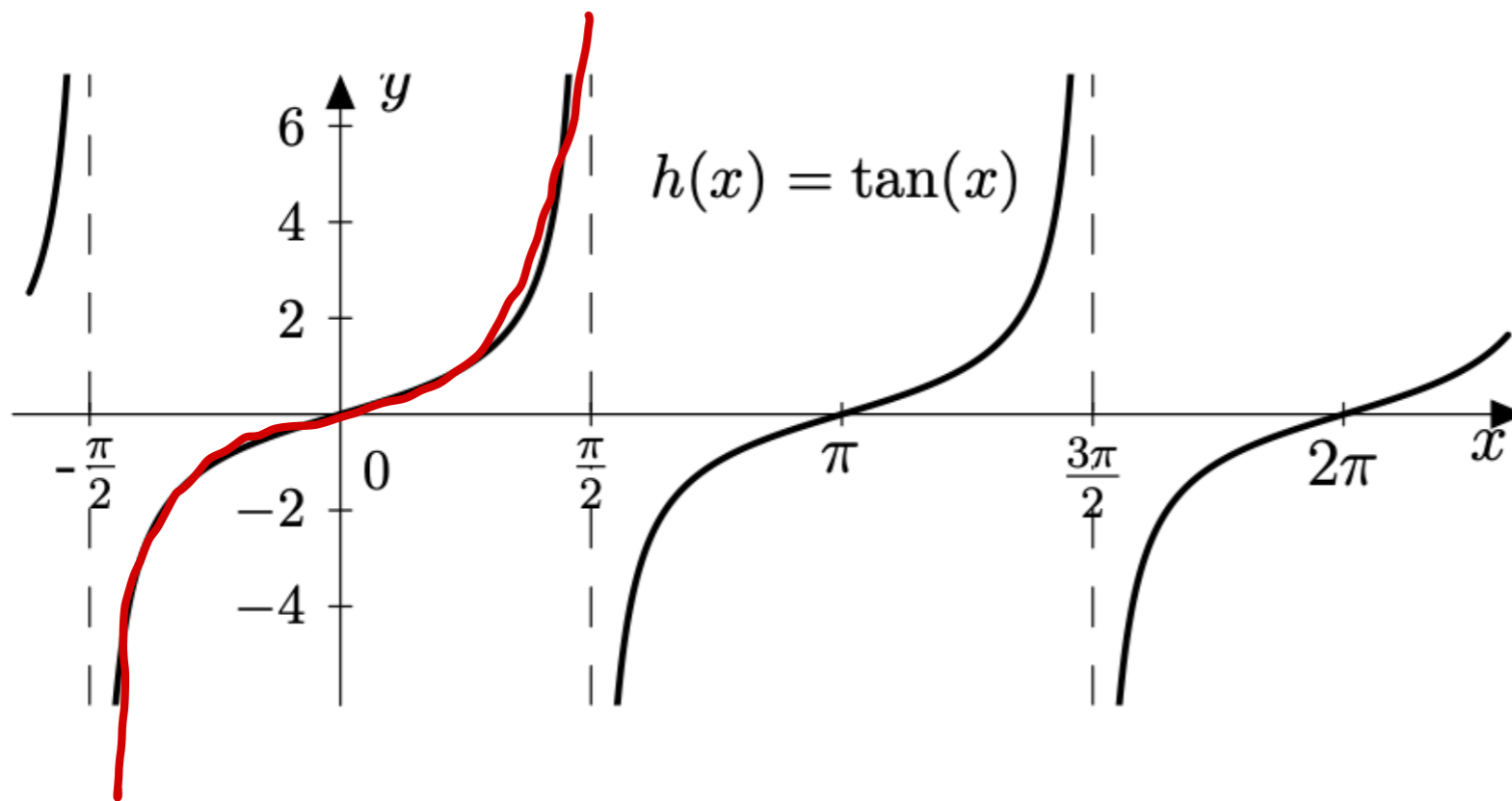


$$f(-0) = -f(0)$$

$$\Rightarrow f(0) = 0$$



Graphes des fonctions trigonométriques : tangente



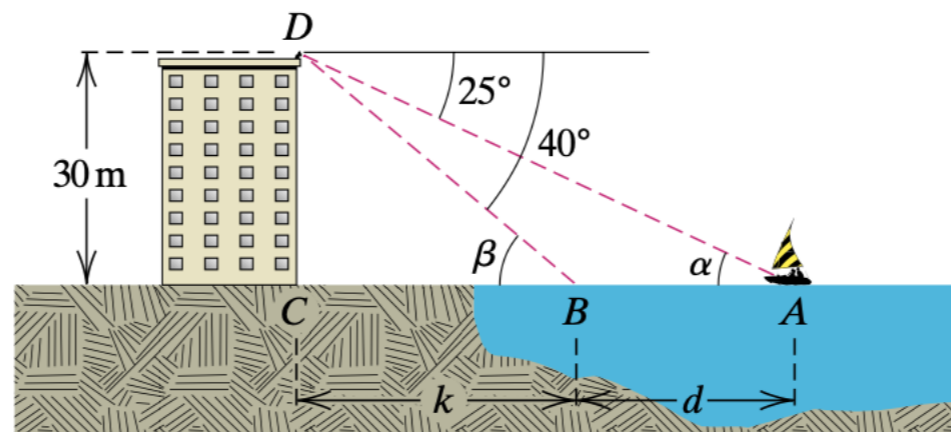
Définition :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

- ❖ La fonction tangente n'est pas définie pour des angles égaux à $\pi/2 + k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.
- ❖ Elle est **périodique** de période π : $\tan(x + \pi) = \tan(x)$
- ❖ Elle prend des valeurs entre $-\infty$ et $+\infty$.
- ❖ Elle est nulle si l'angle vaut $0 + k\pi$. $k \in \mathbb{Z}$
- ❖ Elle est une fonction **impaire** car $\tan(-x) = -\tan(x)$

Exercice

Au sommet d'un bâtiment dominant l'océan, un observateur regarde un bateau faisant route en direction du bâtiment. Si l'observateur se situe 30 m au-dessus du niveau de l'océan et si l'angle de dépression du bateau varie de 25° à 40° pendant la période d'observation, quelle est la distance parcourue par le bateau ?



$$\alpha = 25^\circ$$

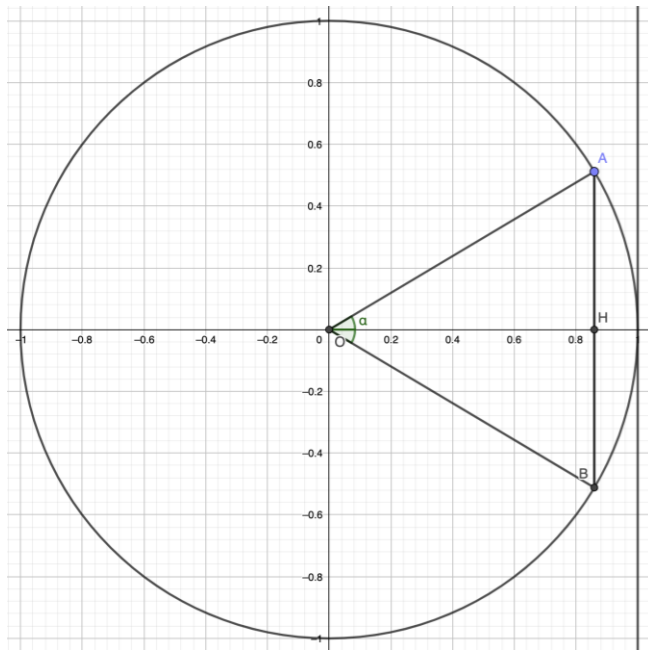
$$\beta = 40^\circ$$

$$\tan(\beta) = \frac{30}{k} \quad (\Delta BCD) \Rightarrow k = \frac{30}{\tan(\beta)} = 35,75 \text{ m}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{30}{k+d} \quad (\Delta ACD) \Rightarrow k+d = \frac{30}{\tan(\alpha)} = 64,33 \text{ m}$$

$$\Rightarrow d = k+d - k = 64 - 35 = \underline{\underline{28,58 \text{ m}}}$$

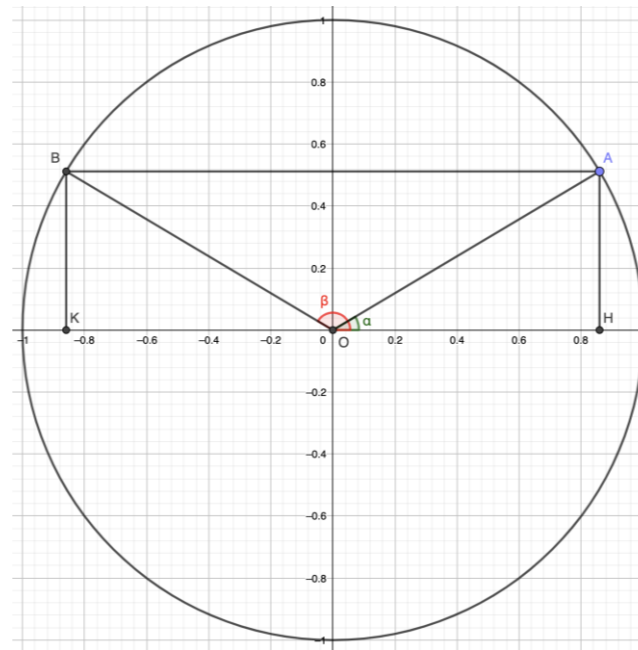
Angles opposés



1. $\sin(\alpha) = -\sin(-\alpha)$
2. $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$
3. $\tan(\alpha) = -\tan(-\alpha)$

Angles supplémentaires

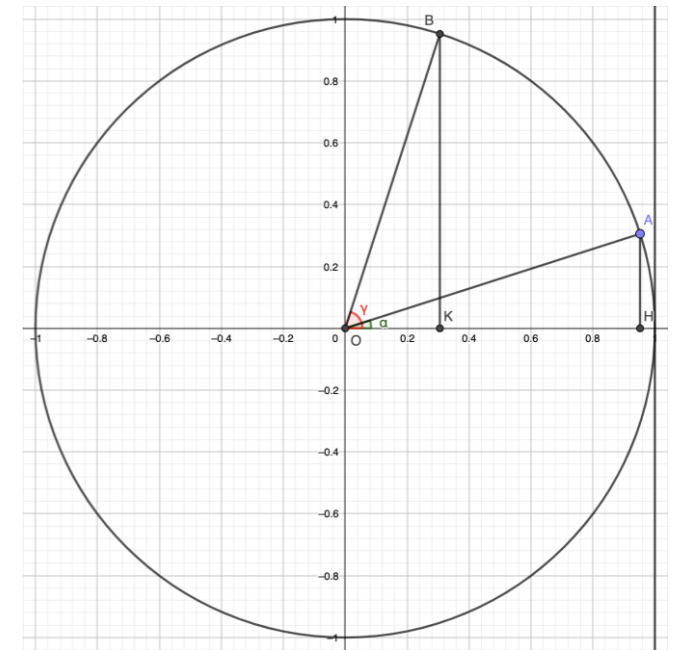
$$\alpha + \beta = \pi$$



1. $\sin(\alpha) = \sin(\beta)$
2. $\cos(\alpha) = -\cos(\beta)$
3. $\tan(\alpha) = -\tan(\beta)$

Angles complémentaires

$$\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2}$$



1. $\sin(\alpha) = \cos(\gamma)$
2. $\cos(\alpha) = \sin(\gamma)$
3. $\tan(\alpha) = \frac{1}{\tan(\gamma)}$

Exercice

Simplifier l'expression suivante :

$$A = \sin(\pi - x) + \cos(\pi + x) + \cos(\pi/2 - x) + \sin(\pi/2 + x)$$

$$\sin(x)$$

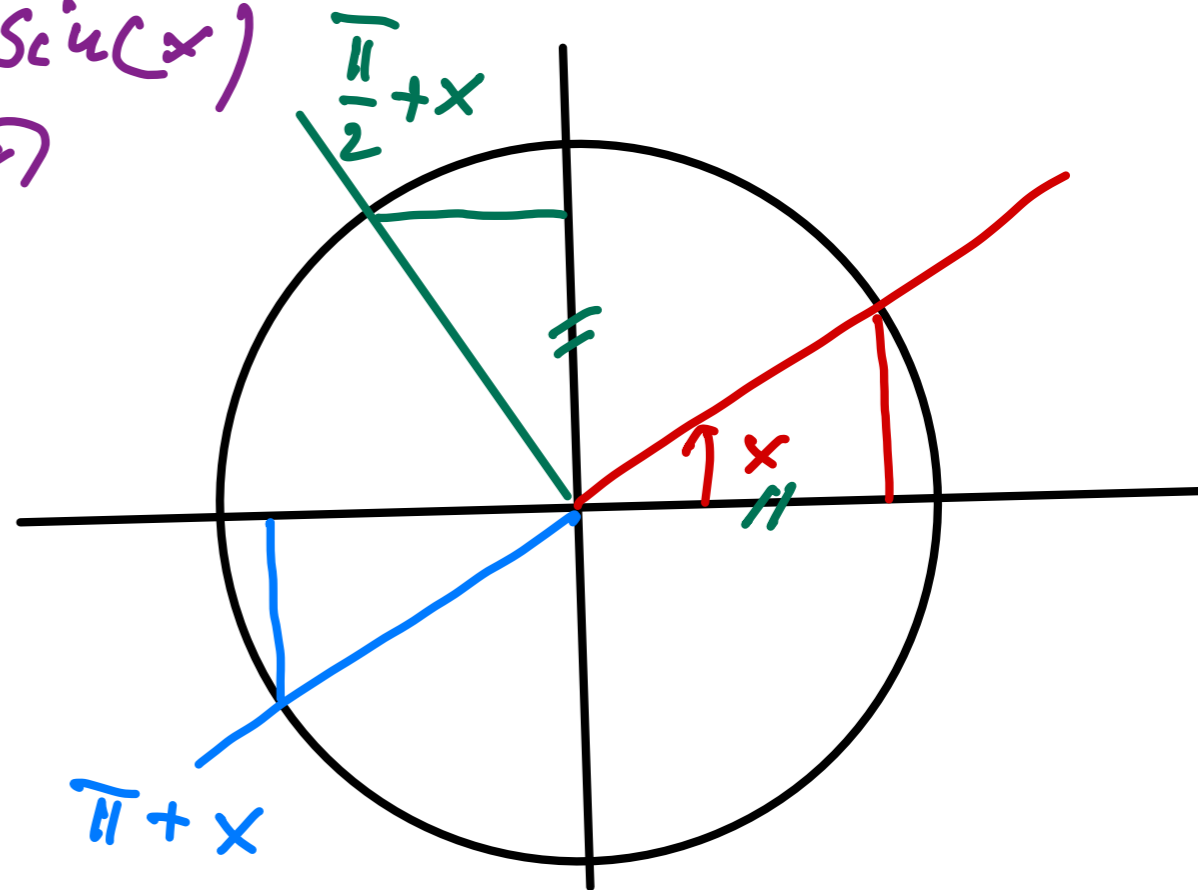
$$- \cos(x)$$

$$\sin(x)$$

$$+ \cos(x)$$

angle
suppl!

angles
complémentaires

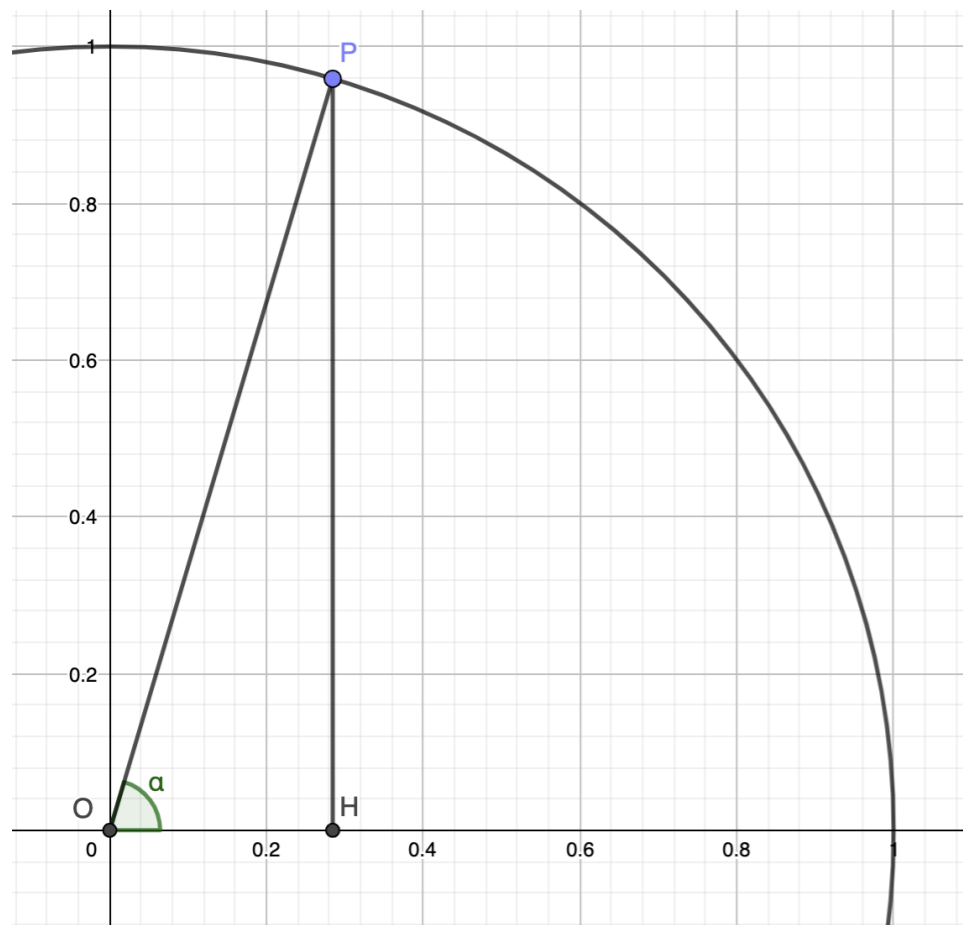


$$A = \sin(x) - \cos(x) + \sin(x) + \cos(x)$$

$$= 2\sin(x)$$



Théorème de Pythagore (formulation trigonométrique)



Soit $\alpha \in]0^\circ, 90^\circ [$ et P le point correspondant sur le cercle trigonométrique.

Alors $\|\vec{OP}\| = 1$ et

$$\|\vec{OP}\|^2 = \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)$$

Ainsi

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Cette formule peut être étendue à tous les angles $\alpha \in [0^\circ, 360^\circ]$.

$$\cos(\alpha) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}$$

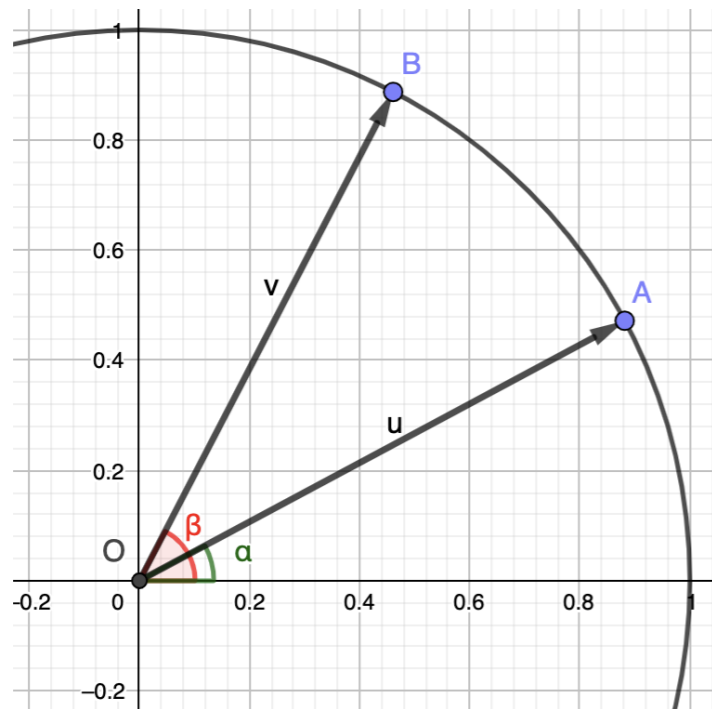
le choix du signe (\pm)
se fait en fonction du quadrant

Exercice

Considérons deux vecteurs unitaires \vec{u} et \vec{v} . Relativement au cercle trigonométrique, on a

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix}.$$

- Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$
- En déduire une formule pour calculer $\cos(\beta - \alpha)$.



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \underbrace{\|\vec{u}\|}_{=1} \cdot \underbrace{\|\vec{v}\|}_{=1} \cos(\beta - \alpha) \\ &= \cos(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

Formules d'addition et de soustraction

Une utilisation judicieuse du produit scalaire et des relations trigonométriques établies précédemment permet d'établir les quatre formules d'addition et de soustraction suivantes :

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)$$

Rappel (Euler) : $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$

$e^{i\beta} = \cos(\beta) + i \sin(\beta)$

Euler

$e^{i(\alpha + \beta)} = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$

$e^{i\alpha + i\beta} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = \left[\cos(\alpha) + i \sin(\alpha) \right] \cdot$

$\left[\cos(\beta) + i \sin(\beta) \right] =$

$\cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) + i \cdot \left(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \right)$

Exercice

- a. À partir des formules d'addition et de soustraction, considérer le cas particulier $\alpha = \beta$. Dédurre ainsi les **formules d'angle double** pour $\sin(2\alpha)$ et $\cos(2\alpha)$.
- b. En remplaçant α par $\alpha/2$ dans les deux formules d'angle double dériver les deux **formules de demi-angle** pour $\sin(\alpha/2)$ et $\cos(\alpha/2)$.

$$\begin{aligned}
 \cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \\
 &= 1 - \sin^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = \underline{1 - 2\sin^2(\alpha)} \\
 &= \cos^2(\alpha) - [1 - \cos^2(\alpha)] \\
 &= \underline{2\cos^2(\alpha) - 1}
 \end{aligned}$$

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha)$$

$$= 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$

$$\alpha = \frac{\gamma}{2}$$
$$2\alpha = \gamma$$

$$\cos(\gamma) = 2\cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) - 1$$

$$\cos(\gamma) + 1 = 2\cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\frac{\cos(\gamma) + 1}{2} = \cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

Le choix du signe est délicat

$$\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\gamma)}{2}}$$

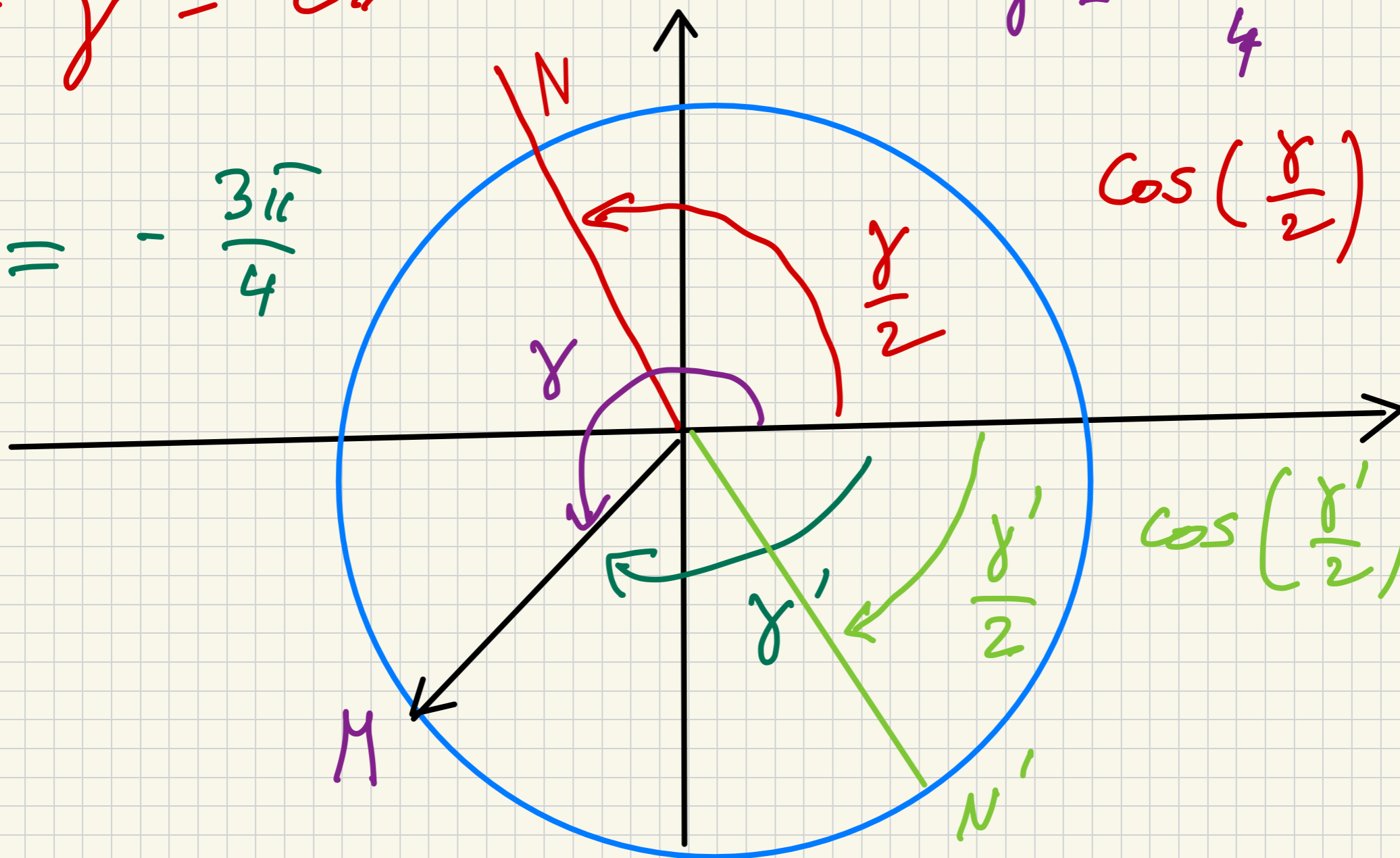
$$\gamma - \gamma' = 2\pi$$

$$\gamma' = -\frac{3\pi}{4}$$

$$\gamma = \frac{5\pi}{4}$$

$$\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) < 0$$

$$\cos\left(\frac{\gamma'}{2}\right) > 0$$



γ et γ' représentent le même point M mais sont différents. Quand on prend $\frac{\gamma}{2}$ et $\frac{\gamma'}{2}$ il apparaît une différence de π entre N et N'