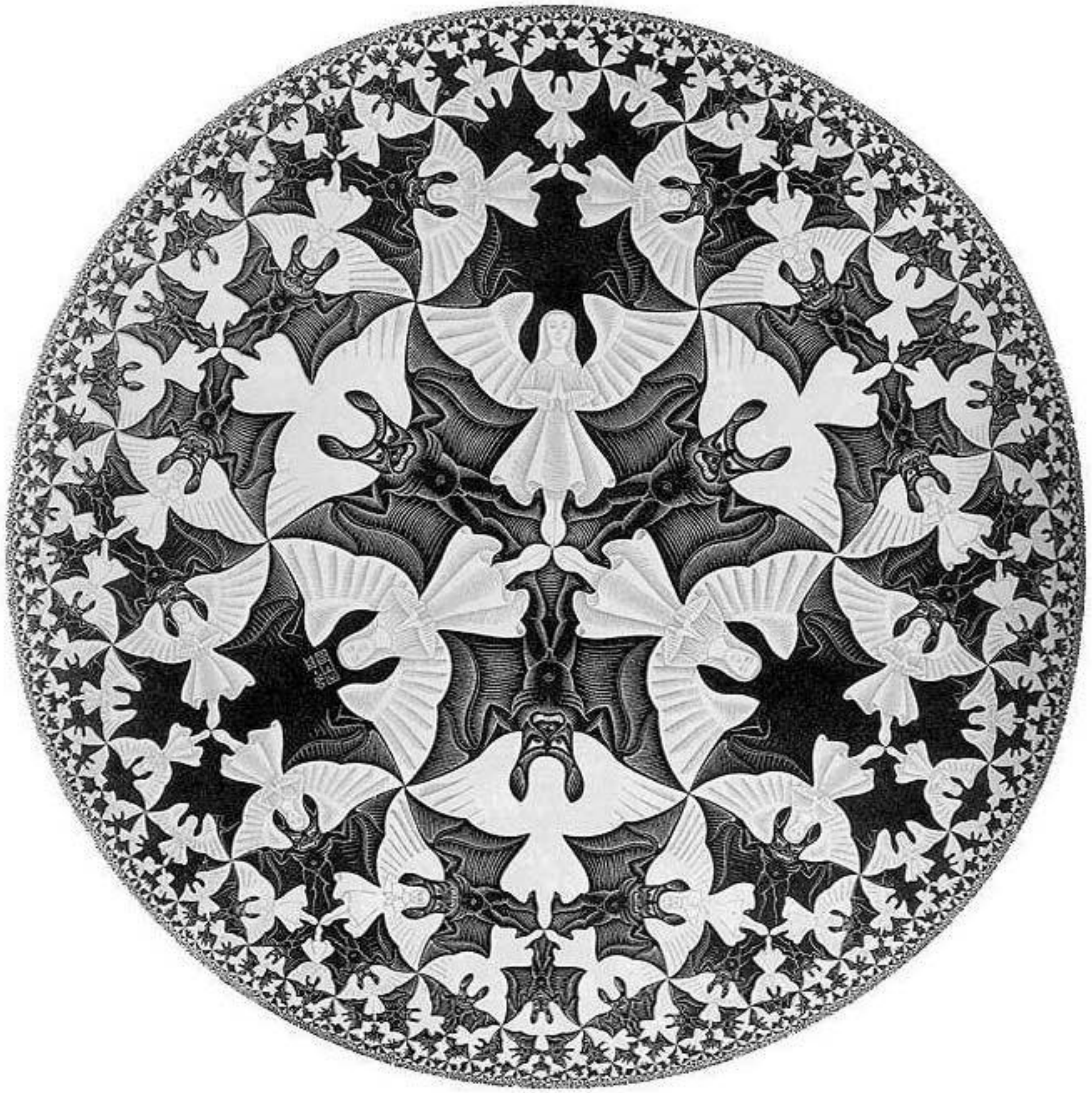
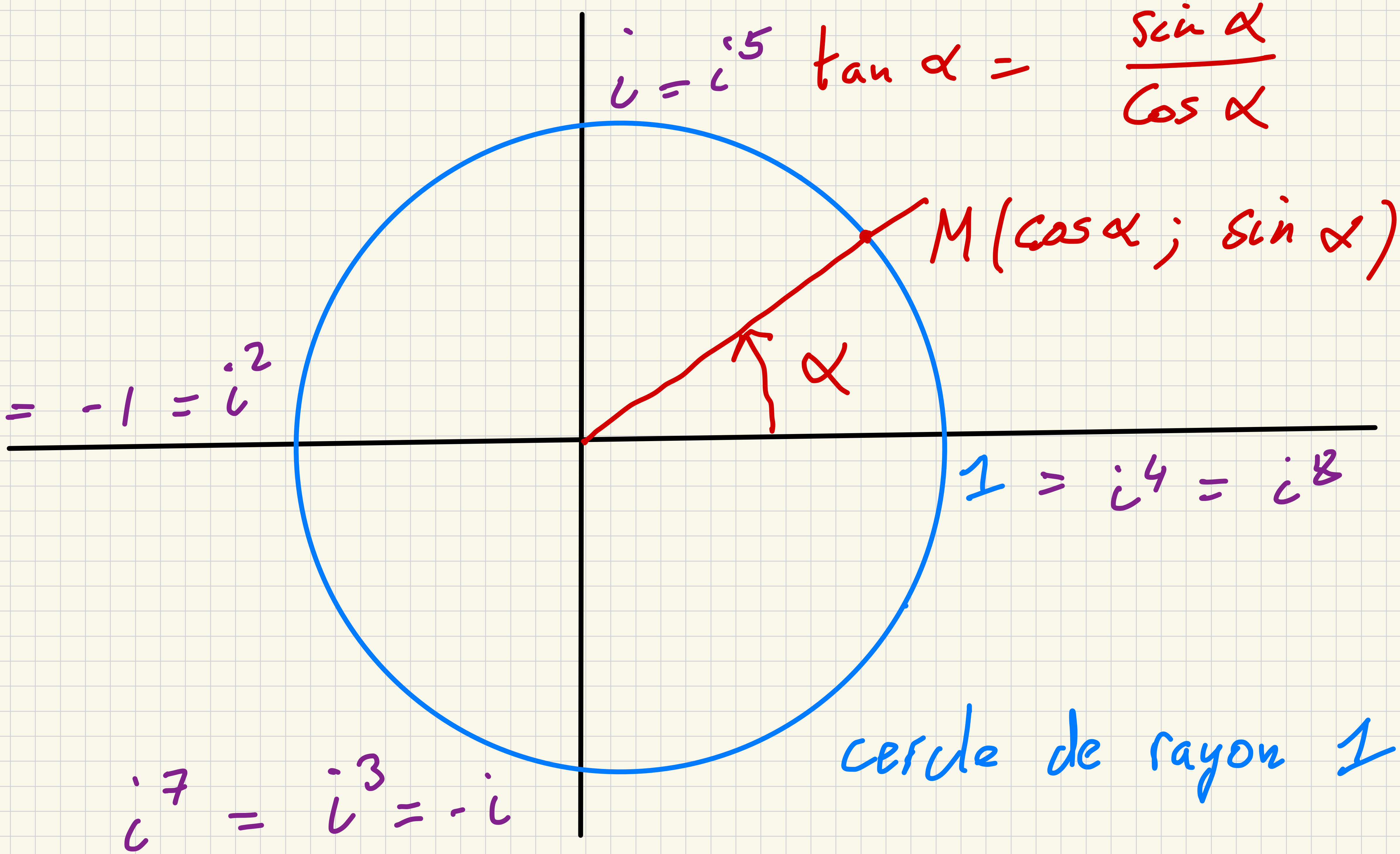


Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Fonctions trigonométriques et hyperboliques

Philippe Chabloz



$i = i^5$
$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
$M(\cos\alpha \,;\, \sin\alpha)$
α
$i^6 = -1 = i^2$
$1 = i^4 = i^8$
$i^7 = i^3 = -i$
cercle de rayon 1

Formules de De Moivre

Les formules suivantes apparaissent dans l'*Introductio in analysin infinitorum* d'Euler qui les a démontrées, pour tout entier naturel n, en 1748. Mais elles apparaissent de manière implicite chez Abraham de Moivre à plusieurs reprises à partir de 1707, dans ses travaux sur les racines n-ièmes de nombres complexes.

$$\sin(nx) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sin x)^k (\cos x)^{n-k} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

slide suivant

$$\cos(nx) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sin x)^k (\cos x)^{n-k} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

La **version avec l'exponentielle complexe est beaucoup plus simple** et se déduit immédiatement:

$$(\cos x + \mathrm{i} \sin x)^n = \left(e^{ix}\right)^n = e^{ixn} = \cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx)$$

$$\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0, 4, 8, \dots \\ 1 & \text{si } k = 1, 5, 9, \dots \\ 0 & \text{si } k = 2, 6, 10, \dots \\ -1 & \text{si } k = 3, 7, 11, \dots \end{cases}$$

$$\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0, 4, 8, 12, \dots \\ 0 & \text{si } k = 1, 5, 9, \dots \\ -1 & \text{si } k = 2, 6, 10, 14, \\ 0 & \text{si } k = 3, 7, 11, 15, \dots \end{cases}$$

Série de Taylor du cosinus

Formule d'Euler pour iα : $e^{i\alpha} = \qquad = \cos\alpha + i\ \sin\alpha$

Formule d'Euler pour -iα : $e^{-i\alpha} = \cos(-\alpha) + i \cdot sin(-\alpha) = \cos\alpha - i \cdot \sin\alpha$

En additionnant les 2 lignes et en divisant par 2 on obtient

$$\boldsymbol{\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}}$$

De même en soustrayant la 2ème ligne à la 1ère puis en divisant par 2i on obtient:

$$\boldsymbol{\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}}$$

$$e^x = \sum_{z=0}^{\infty} \frac{x^n}{n\,!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3\,!} + \cdots + \frac{x^n}{n\,!} + \cdots$$

En utilisant la série de l'exponentielle dans la formule du **cosinus** ci-dessus on obtient

$$\cos x = \frac{1}{2} \cdot \left[e^{ix} + e^{-ix}\right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\sum_{z=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n\,!} + \sum_{z=0}^{\infty} \frac{(-ix)^n}{n\,!}\right] = 1 + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \frac{i^6x^6}{6!} + \ \ldots$$

$$\boldsymbol{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)\,!}}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$$

Série de Taylor du sinus

En utilisant la série de l'exponentielle dans la formule du **sinus** ci-dessus on obtient

$$\sin x = \frac{1}{2i} \cdot \left[e^{ix} - e^{-ix}\right] = \frac{1}{2i} \cdot \left[\sum_{z=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n\,!} - \sum_{z=0}^{\infty} \frac{(-ix)^n}{n\,!}\right] = x + \frac{i^3 x^3}{i\ 3!} + \frac{i^5 x^5}{i\ 5!} + \ \ldots$$

$$\boldsymbol{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,!}}$$

Série de Taylor pour sinus et cosinus

La série de Taylor au point a d'une fonction indéfiniment dérivable f en ce point est une série entière $\sum c_n(x-a)^n$ construite à partir de f et de ses dérivées successives en a. Une fonction f est dite *analytique* en a quand cette série coïncide avec f au voisinage de a.

On peut définir les fonctions trigonométriques à l'aide de séries entières :

Brook Taylor
1685 - 1731

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Nous avons déjà rencontré une autre série de Taylor. En effet, nous avons montré que pour la fonction exponentielle :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

On sait $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ (I)

$$e^{-i\alpha} = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)$$

$$= \cos(\alpha) - i\sin(\alpha) \quad (\mathrm{II})$$

(I) + (II) $\Rightarrow e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2\cos(\alpha)$

$$\Rightarrow \boxed{\cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}}$$

On sait que $e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$e^{i\alpha} = 1 + i\alpha + \frac{(i\alpha)^2}{2} + \frac{(i\alpha)^3}{3!} + \frac{(i\alpha)^4}{4!} + \dots$$

$$= 1 + i\alpha - \frac{\alpha^2}{2} - i\frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!} + i\frac{\alpha^5}{5!} + \dots -$$

$$e^{-i\alpha} = 1 - i\alpha + \frac{(-i\alpha)^2}{2} + \frac{(-i\alpha)^3}{3!} + \frac{(-i\alpha)^4}{4!} + \dots$$

$$= 1 - i\alpha - \frac{\alpha^2}{2} + i\frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!} - i\frac{\alpha^5}{5!}$$

$$(*) + (*) \Rightarrow e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2 - 2\frac{\alpha^2}{2} + 2\frac{\alpha^4}{4!} - 2\frac{\alpha^6}{6!} + \dots$$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \\ &= 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \frac{\alpha^8}{8!} - \dots\end{aligned}}$$

$$\boxed{\sin(\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + - \dots}$$

Exemples

1) $$\sin(0{,}2) = 0{,}2 - \frac{(0{,}2)^3}{3!} + \frac{(0{,}2)^5}{5!} - \underbrace{\frac{(0{,}2)^7}{7!}}_{\approx 3\cdot 10^{-9}} + \ldots$$

$$S_3 = 0{,}2 - \frac{(0{,}2)^3}{6} = 0{,}198\overline{6}$$

$$S_5 = S_3 + \frac{(0{,}2)^5}{5!} = 0{,}198669\overline{333}$$

converge rapidement

$$\sin(0{,}2) = 0{,}198669331$$

2) $$\sin(2) = 2 - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} - \frac{2^7}{7!} + \frac{2^9}{9!}$$

$$2 - \frac{8}{6} = 0{,}\overline{66} \qquad \sin(2) = 0{,}909297$$

converge plus lentement

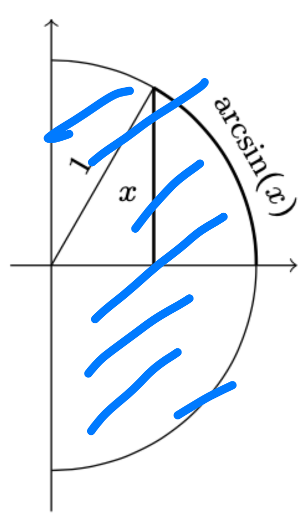
Les fonctions trigonométriques réciproques

Les fonctions réciproques des fonctions sinus, cosinus et tangente sont appelées **arcsin, arccos et arctan.**

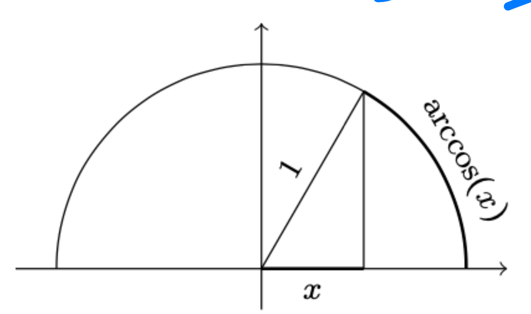
Pour définir ces fonctions réciproques, on doit restreindre chaque fonction trigonométrique à un intervalle sur lequel elle est **bijective**.

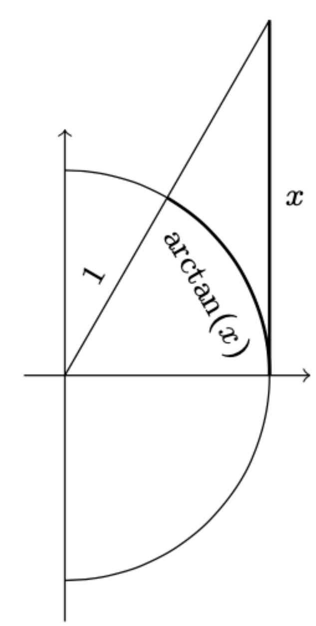
- l'**arcsin** d'un nombre réel compris entre -1 et 1 est l'unique mesure d'angle en radians **entre** $-\pi/2$ **et** $\pi/2$ dont le **sinus** vaut ce nombre.
- l'**arccos** d'un nombre réel compris entre -1 et 1 est l'unique mesure d'angle en radians **entre** 0 **et** π dont le **cosinus** vaut ce nombre.
- l'**arctan** d'un nombre réel compris est l'unique mesure d'angle en radians **entre** $-\pi/2$ **et** $\pi/2$ dont la **tangente** vaut ce nombre.

I
IV



I II

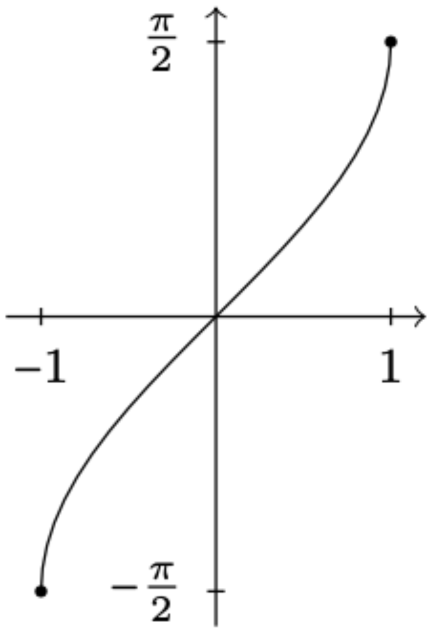




I IV

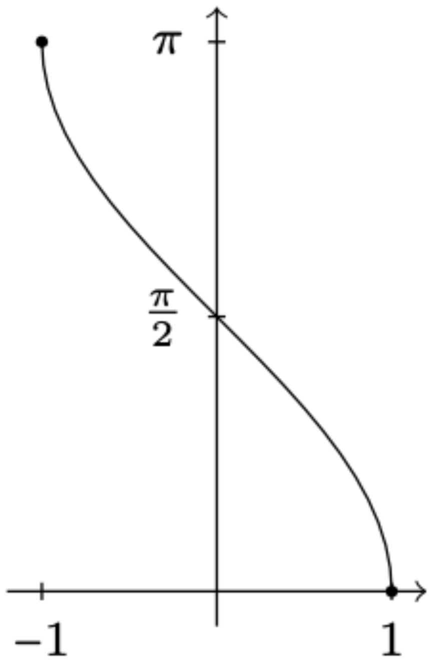
Graphiques des fonctions trigonométriques réciproques

$\arcsin: [-1,1] \mapsto [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



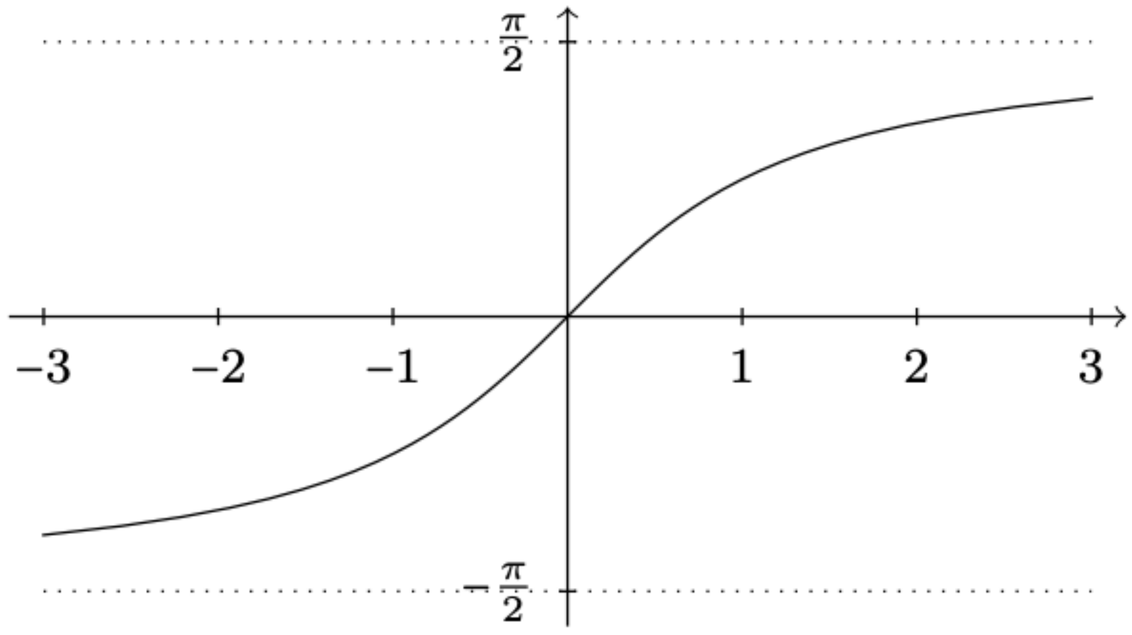
$\arcsin(x)$

$\arccos: [-1,1] \mapsto [0, \pi]$



$\arccos(x)$

$\arctan: \mathbb{R} \mapsto]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$



$\arctan(x)$

$\arcsin(\sin x) = x$ seulement si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ET $\sin(\arcsin x) = x$ pour tout $x \in [-1, 1]$

$$\arcsin(\sin \underline{\underline{\alpha}}) \neq \alpha$$

si $\alpha \notin \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$

$$= \alpha + 2\pi \cdot k$$

$k \in \mathbb{Z}$

__Exemple__ Trouver tous les $x \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\sin(x) = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

Trigonométrie dans un triangle quelconque

Théorème du sinus

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Théorème de l'aire

$$Aire\Delta = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha)$$

$$Aire\Delta = \frac{1}{2}ac\sin(\beta)$$

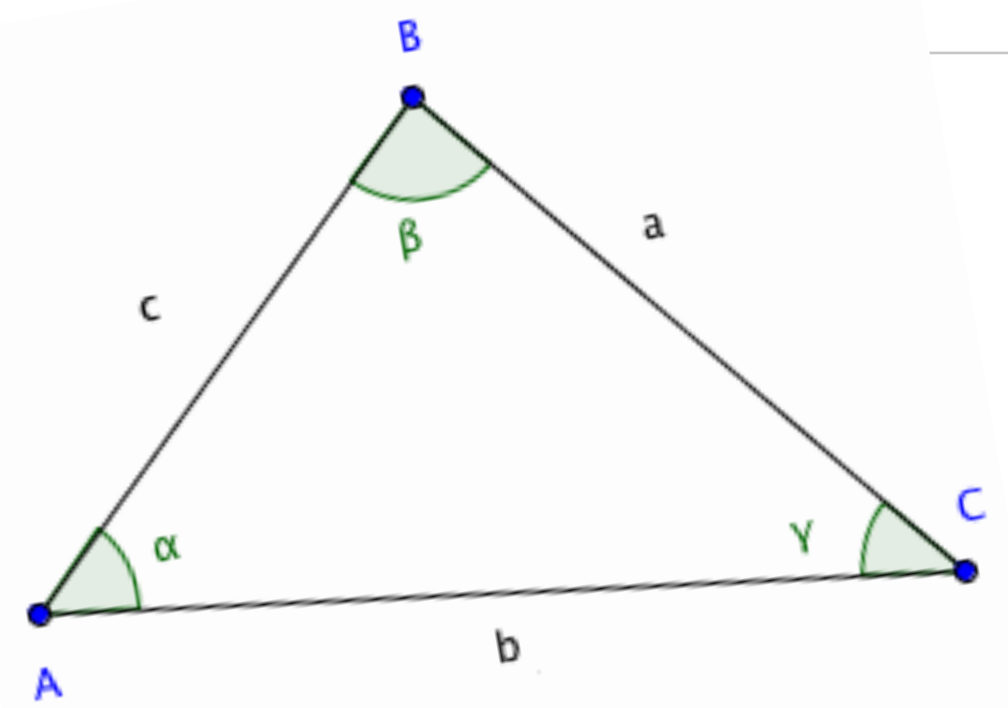
$$Aire\Delta = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma)$$

Théorème du cosinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$



- Un triangle est complètement déterminé dans les cas suivants :
  1. On en connaît **un côté et deux angles** (théorème du sinus).
  2. On en connaît **deux côtés et un angle opposé à l'un d'entre eux** (théorème du sinus).
  3. On en connaît **deux côtés et l'angle compris** entre ces deux côtés (théorème du cosinus).
  4. On en connaît **trois côtés** (théorème du cosinus).
- On peut calculer l'aire sans connaître la hauteur (théorème de l'aire).

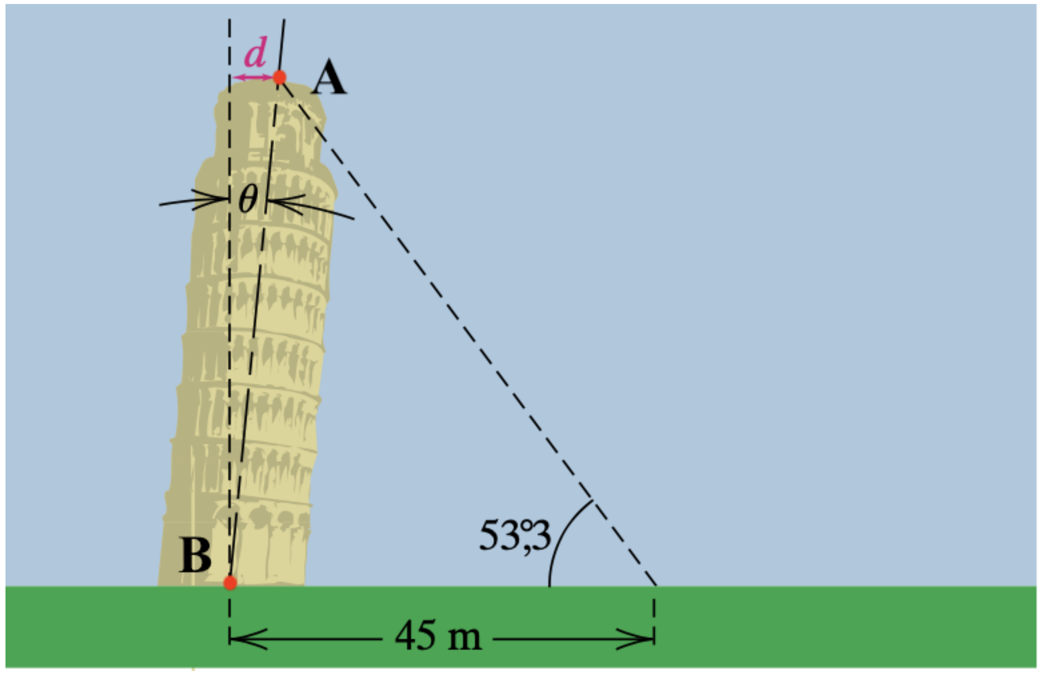
Exercice

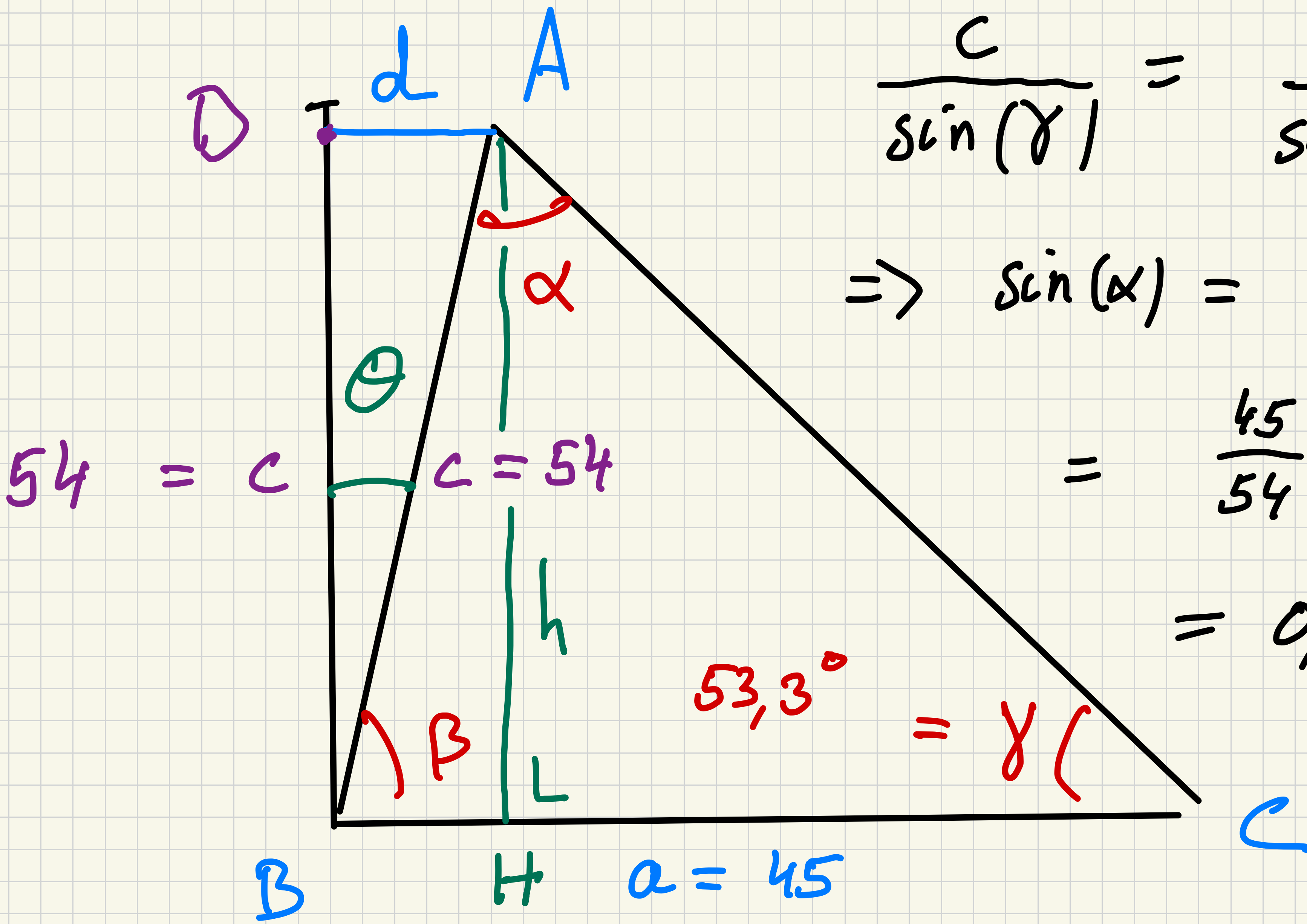
À l'origine, la tour de Pise était perpendiculaire à la surface du sol et mesurait 54 m de haut. *Maintenant*, elle penche d'un angle θ par rapport à la perpendiculaire, comme le montre la figure ci-dessous. Lorsque le sommet de la tour est observé à partir d'un point distant de 45 m du centre de sa base, l'angle d'élévation est de 53.3°.

a. Calculer l'angle θ.

b. Calculer la hauteur de la tour inclinée.

c. Calculer la distance d qui exprime de combien le centre du sommet de la tour s'est éloigné de la perpendiculaire.





Théorème du sinus :

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{a}{\sin(\alpha)}$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{a \sin(\gamma)}{c}$$

$$= \frac{45}{54} \cdot \sin(53{,}3°)$$

$$= 0{,}668 \Rightarrow \alpha = 41{,}92°$$

$$\Rightarrow \beta = 180° - \alpha - \gamma = 84{,}77° \Rightarrow \theta = 90° - \beta = 5{,}224°$$

$$\Rightarrow h = 54 \cdot \cos\theta = 53{,}77 \text{ m.}$$
ABD

$$d = 54 \cdot \sin(\theta) = 4{,}92 \text{ m.}$$
ABD

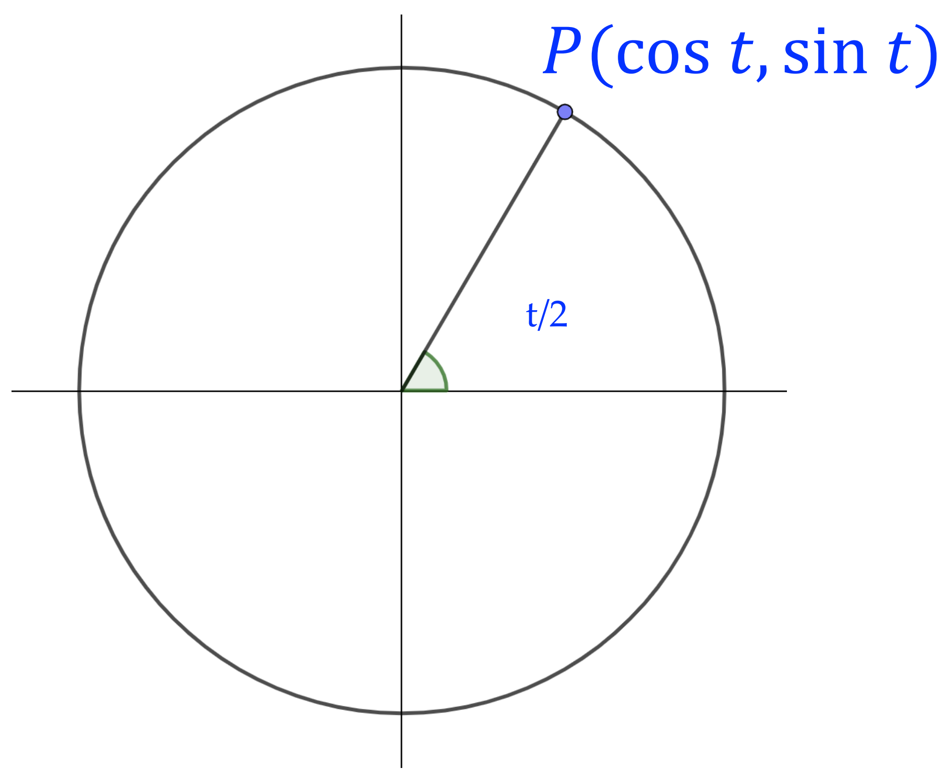
Cercle et hyperbole

Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \boxed{x^2 + y^2 = 1\ \}}$

un cercle de rayon 1 centré en (0,0). Alors le point

$$\boxed{P(\cos t, \sin t)}$$

est un point sur le cercle C qui détermine une surface égale à $t/2$ avec l'axe Ox.



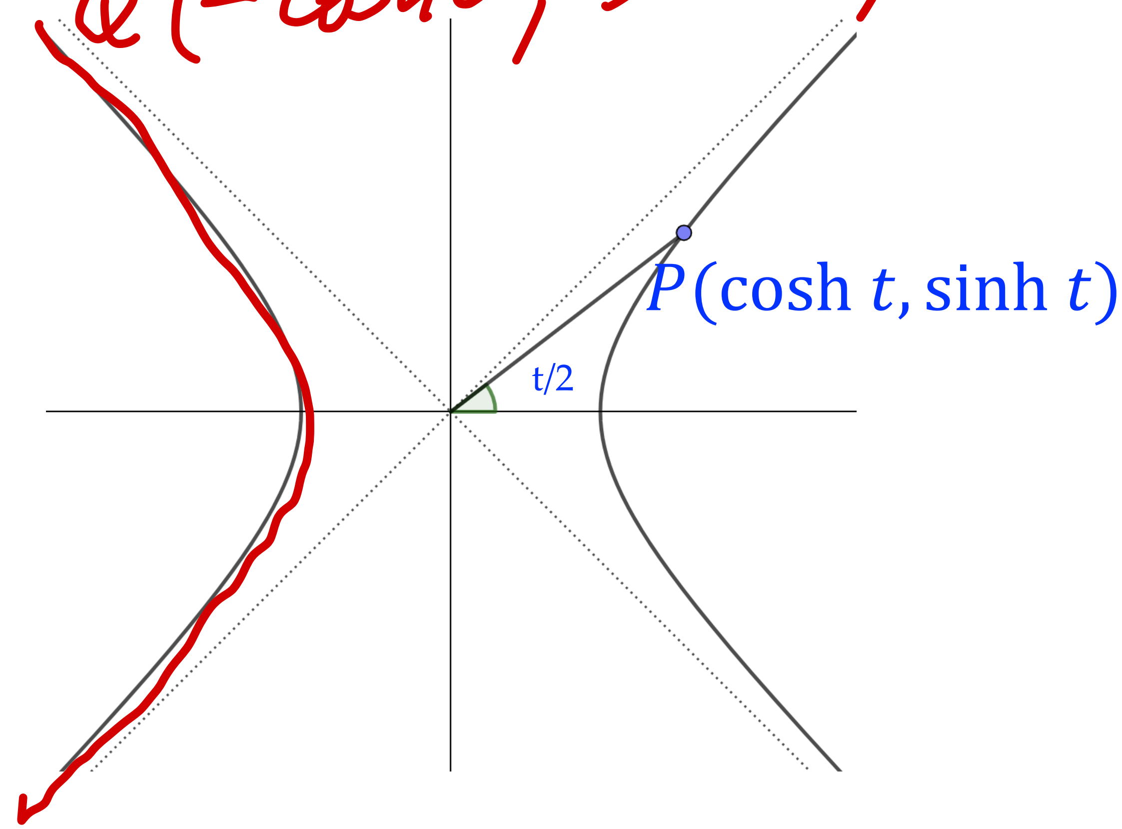
Soit $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \boxed{x^2 - y^2 = 1\ \}}$

une hyperbole centrée en (0,0). Alors

$$P(\cosh t, \sinh t)$$

est un point sur l'hyperbole H qui détermine une surface égale à $t/2$.

$Q(-\cosh t, \sinh t)$



Les fonctions hyperboliques

Les fonctions hyperboliques sont analogues aux fonctions trigonométriques, mais le paramètre x ne peut pas être interprété comme un angle. Ce sont les fonctions :

- **Sinus hyperbolique :**

Défini comme étant la partie **impaire de la fonction exponentielle**, c'est-à-dire par :

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

- **Cosinus hyperbolique**

Défini comme étant la partie **paire de la fonction exponentielle**, c'est-à-dire par :

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

- **Tangente hyperbolique**

Défini comme le **rapport entre les sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique**, c'est-à-dire par :

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Propriétés des fonctions hyperboliques

- Les sinus et cosinus hyperboliques vérifient l'identité suivante :

$$\boxed{\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1}$$

- La fonction $\sinh$ est impaire et $\sinh(0) = 0$.

$\sinh(-x) = -\sinh(x)$

- La fonction $\cosh$ est paire et admet 1 pour minimum en $x = 0$.

$\cosh(-x) = \cosh(x)$

- La fonction cosinus hyperbolique est convexe. Elle intervient dans la définition de la *chaînette*, laquelle correspond à la forme que prend un câble suspendu à ses extrémités et soumis à son propre poids.

- *Les fonctions hyperboliques satisfont à des relations, très ressemblantes aux identités trigonométriques.*

voir exercices !!