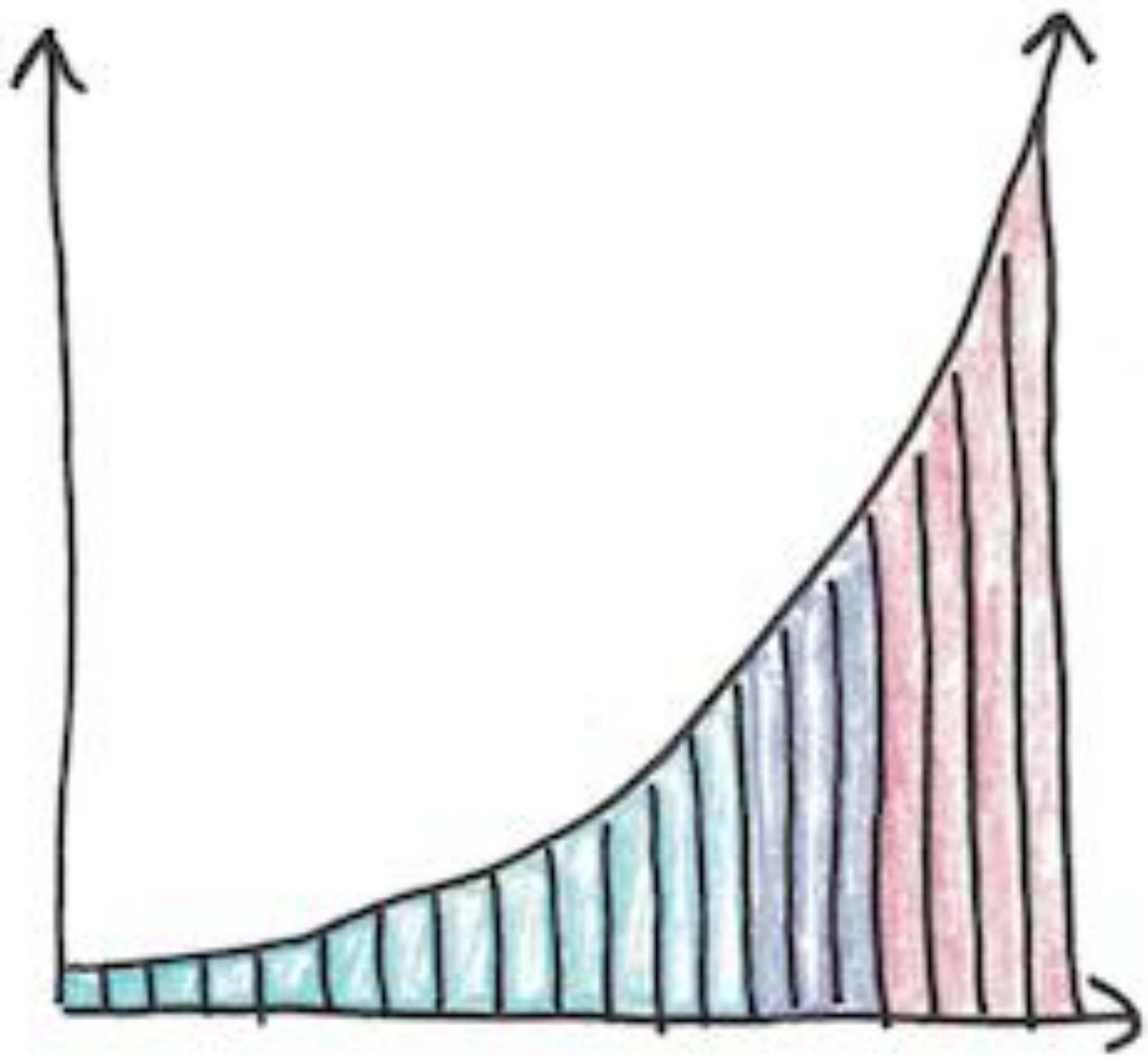


Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Fonctions exponentielles

Philippe Chabloz

Triangle de Pascal

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1								
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}}$$

$$\binom{10}{6} = \binom{9}{6} + \binom{9}{5}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$\binom{120}{117} = \frac{120!}{117!\cdot 3!}$$

$$= \frac{120\cdot 119\cdot 118}{\cancel{6}}$$

Propriété dite oralement.

Si p est premier alors

$\binom{p}{k}$ est divisible par p pour tout $k \neq 0$, $k \neq p$.

Puissances à exposants naturels

Une puissance d'un nombre non-nul est le résultat de la multiplication répétée de ce nombre avec lui-même :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ facteurs}$$

où n est un entier strictement positif ($n \in \mathbb{N}^*$) et a un nombre réel non nul ($a \in \mathbb{R}^*$).

- Un argument de comptage permet d'obtenir la formule suivante :

$$\boldsymbol{a^n \cdot a^m} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ facteurs} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\ facteurs} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n+m\ facteurs} = \boldsymbol{a^{n+m}}$$

qui est valable pour $n, m \in \mathbb{N}^*$.

- « *Pourquoi un nombre à la puissance zéro est égal à 1 ?* » Si l'on souhait que la formule précédente reste vraie pour $n = 0$, alors on doit avoir que

$$a^0 \cdot a^m = a^{m+0} = a^m .$$

Ainsi

$$\boldsymbol{a^0 = 1}$$

Puissances à exposants entiers

1. Comment définir a^{-n} pour $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}^*$?

En utilisant la règle des puissances, qui dit que multiplier des puissances revient à additionner leurs exposants, on obtient:

$$a^n \cdot a^{-n} = a^0 = 1$$

d'où la formule

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$
$$= 0{,}04$$

Nous avons donc défini a^n pour tous $n \in \mathbb{Z}$.

2. Formule pour $(a^m)^n$

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ facteurs}} = \underbrace{(\overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ facteurs}}) \ldots (\overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ facteurs}})}_{n \text{ facteurs}} = a^{m \cdot n}$$

Ainsi

$$\boxed{(a^m)^n = a^{n \cdot m} \quad \forall n, m \in \mathbb{Z} \text{ et } a \in \mathbb{R}^*}$$

Elever une puissance à une puissance

- En général

$$(a^b)^c \neq a^{(b^c)}$$

Par exemple : $(2^2)^3 = 64$ et $2^{(2^3)} = 256$

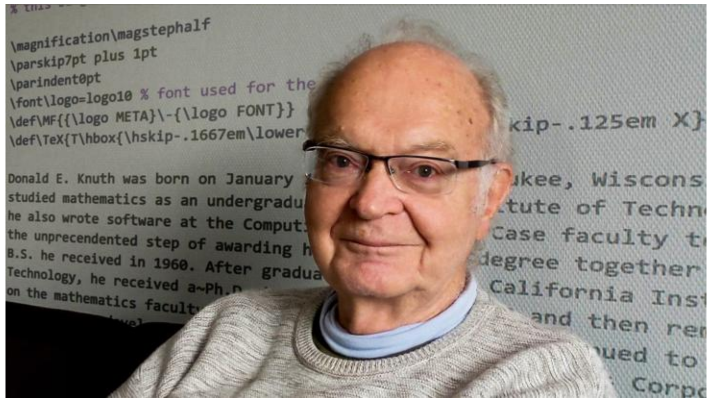
Convention :

$$a^{b^c} \text{ signifie } a^{(b^c)}$$

- En 1976, le mathématicien **Donal Knuth** a inventé une notation pour désigner les opérations qui sont une répétition des puissances :

$$a \uparrow b = a^b$$

$$a \uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow \cdots \uparrow a}_{b \text{ facteurs}} = a^{a^{a^{\cdots}}}$$



Donal Knuth

Puissances à exposants rationnels

Comment définir $6^{\frac{12}{10}}$ ou $25^{\frac{1}{5}}$?

2^{π}

- En utilisant les définitions précédentes, on voit que

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$2^{4/3} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$$

- Donc $a^{\frac{1}{n}}$ est un nombre qui élevé à la puissance n donne a. Pour éviter les nombres complexes on impose que pour n pair a doit être un réel positif. Alors :

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

- De même

$$a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

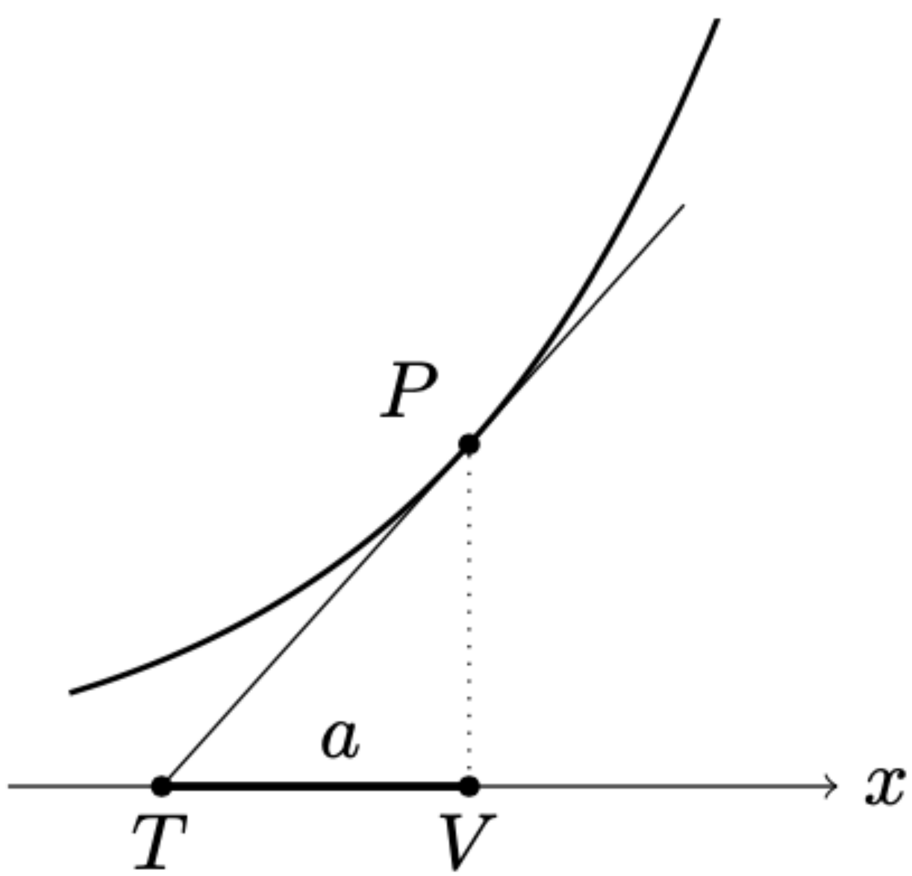
- En général, on a la formule qui définit les puissances à exposant rationnel :

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \qquad \forall n, m \in \mathbb{Z}^*$$

Vers l'exponentielle

Au début du XVIIe siècle, *Florimond de Beaune* pose à *Descartes* le problème suivant:

Trouver une courbe $f(x)$ telle que la distance entre V et T, les points où la verticale et la tangente par un point P de la courbe coupent l'axe des x, ait une valeur constante donnée a.



Florimond de Beaune
1601 - 1652

L'idée de Leibniz

- Soit le point $P(x, y)$ sur cette courbe. Augmentons x d'une petite quantité Δx, et considérons un point $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ sur la courbe et aussi sur la droite, alors

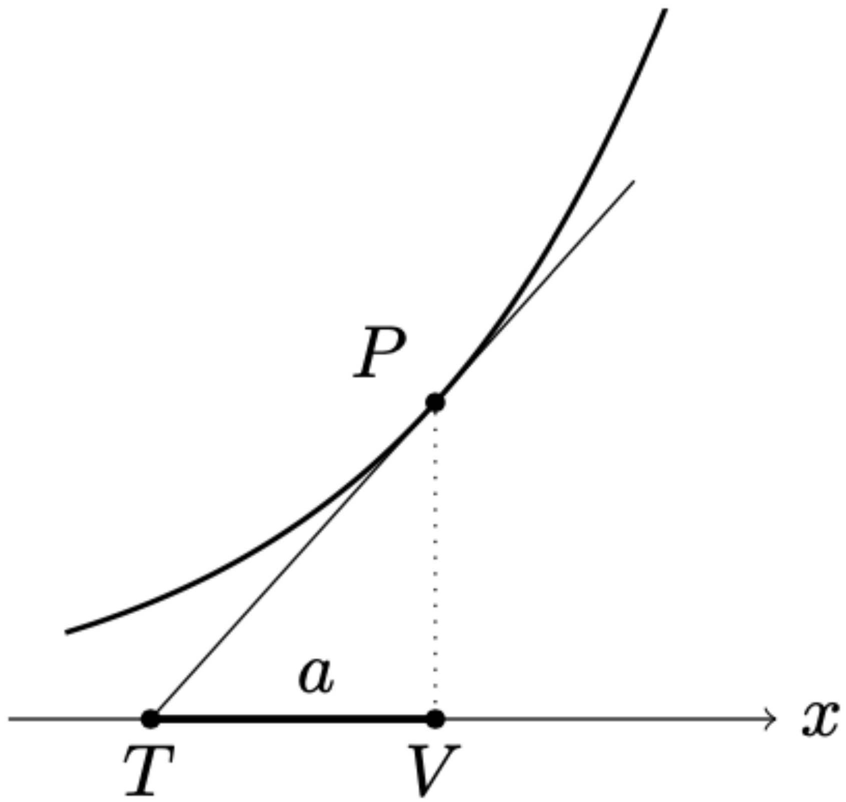
$$\Delta y = \frac{\Delta x}{a} y$$

- Ainsi $P_1(x + \Delta x, (1 + \frac{\Delta x}{a})y)$.
- On continue ce processus pour obtenir une success

$$P_n(x + n\Delta x, (1 + \frac{\Delta x}{a})^n y)$$

- Leibniz obtient donc une suite de nombres :

$$y, (1 + \frac{\Delta x}{a})y, (1 + \frac{\Delta x}{a})^2 y, (1 + \frac{\Delta x}{a})^3 y, \ldots$$



- Euler rencontre cette suite dans des problèmes de croissance d'une population et de calcul d'intérêt composé.

Exercice (intérêt composé)

Supposons que 1000.- soient investis à un taux **d'intérêt annuel de 9%** capitalisé (payé) mensuellement. Calculer le nouveau montant du capital après 5 ans.

1 mois $C_1 = 1000\left(1 + \frac{0{,}09}{12}\right)$

2 mois $C_2 = C_1 \cdot \left(1 + \frac{9\%}{12}\right) = 1000 \cdot \left(1 + \frac{9\%}{12}\right)^2$

12 mois $C_{12} = 1000 \cdot \left(1 + \frac{9\%}{12}\right)^{12}$

5 ans = 60 mois $\Rightarrow$ $C_{60} = 1000 \cdot \left(1 + \frac{9\%}{12}\right)^{60}$

Formule générale:

$$C_t = C_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{tn}$$

$= 1545.70$

C_0 : capital de départ
i : taux d'intérêt annuel
n : nombre de paiements par année
t : nombre d'années

Intérêt composé

Supposons que la somme de 1000.- soit investie à un taux d'intérêt composé de 9%. Calculer le nouveau montant du capital après **une** année si l'intérêt a été capitalisé *trimestriellement, mensuellement, par semaine, par jour, chaque heure et chaque minute.*

Si nous prenons $C_0 = 1000$,$t = 1$ et $i = 0.09$ dans la formule de l'intérêt composé, alors

$$C_n = 1000 \cdot (1 + \frac{0.09}{n})^n$$

Période d'intérêt	Valeur de n	Capital après une année
Trimestre	4	1093.08
Mois	12	1093.81
Semaine	52	1094.09
Jour	365	1094.16
Heure	8760	1094.17
Minute	525600	1094.17
année	1	1090.–

Nombre d'Euler

Si n tend vers l'infini la valeur de l'expression $(1+\frac{1}{n})^n$ tend vers un nombre irrationnel noté e.

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \approx 2.71828$$

n	Valeur approchée de $(1+\frac{1}{n})^n$
1	2.00000000
10	2.59374246
100	2.70481383
1000	2.71692393
10'000	2.71814593
100'000	2.71826824
1'000'000	2.71828169
10'000'000	2.71828169

$(1+\frac{1}{100})^{100}$

Une limite de type

" 1^{∞} " est

indéterminée

Nombre d'Euler

Euler a eu l'idée suivante : pour calculer la quantité

$$(1 + \frac{1}{n})^n$$

lorsque n croît indéfiniment (n tend vers $+\infty$) :

Développons à l'aide du binôme de Newton !

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Leonard Euler
1707 - 1783

En conclusion on a deux définitions de e :

formule

$$e = \lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

de binôme

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ \dots\ = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k\,!}$$

La seconde converge beaucoup plus vite vers e

n	**Valeur de** $(1+\frac{1}{n})^n$	**Valeur de** $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}$
1	2	2
2	2.25	2.5
3	2.37037037	2.66666667
4	2.44140625	2.70833333
5	2.48832	2.71666667
6	2.52162637	2.71805556
10	2.59374246	2.7182818
13	2.62060089	2.718281828

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{n}\right)^{\frac{n}{4}}\right]^4$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\boxed{\frac{n}{4} = m} \Rightarrow \frac{4}{n} = \frac{1}{m}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}_{\to e}\Bigg]^4 = e^4$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{q}{n}\right)^n = e^q \quad \forall q\in\mathbb{Q}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$q = -1$

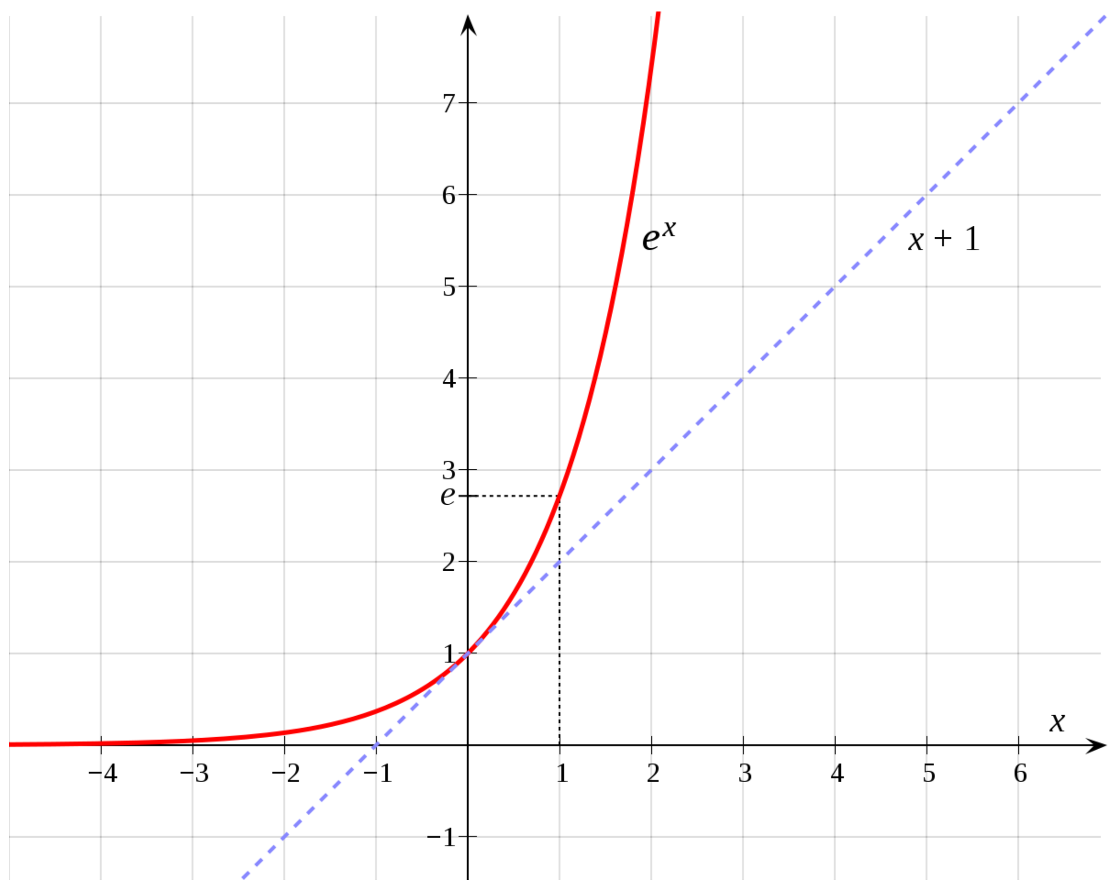
La fonction exponentielle

En utilisant la même technique que celle exposée ci-dessus, Euler a généralisé cet argument en démontrant que pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Fct

exponentielle



Cette fonction répond à la question posée par *Florimond de Beaune* car si $P(c, e^c)$ est un point sur le graphe, alors la tangente à P à une pente égale à e^c (voir la *série d'exercice* 2).

EPFL

Propriétés de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle

$$exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$$
$$x \mapsto e^x$$

bijective

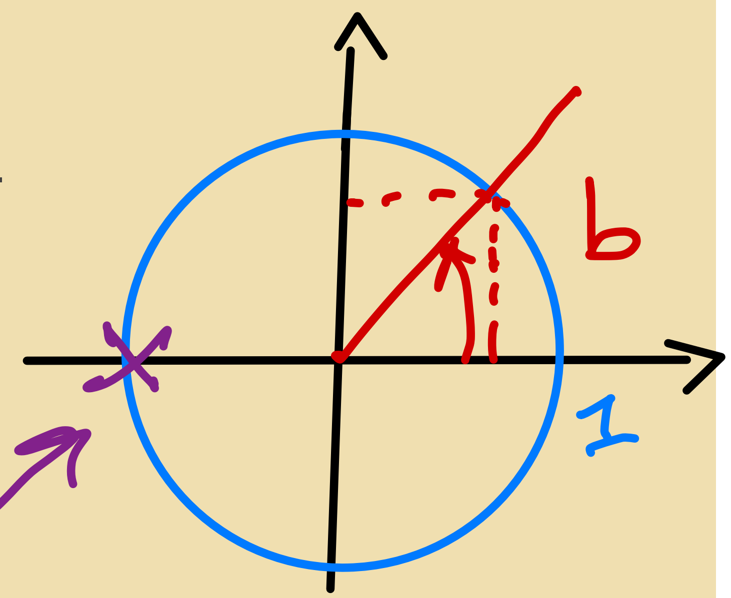
est une fonction derivable (et donc continue) ayant les propriétés suivantes :

1. La fonction *exp* est strictement monotone croissante avec un taux de croissance donnée par $exp(x)$ qui devient de plus en plus élevé.
2. $exp(\mathbb{R}) =]0; +\infty[$. Pour tout $y > 0$ il existe donc exactement une valeur $x \in \mathbb{R}$ telle que $e^x = y$.
3. On a $e^0 = 1$ et $e^1 = e$
4. On a $e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ || $2^{n+m} = 2^n \cdot 2^m$
5. On a $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

L'exponentielle complexe

- On peut étendre l'exponentielle réelle à tous les nombre complexes en posant pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$



Cette fonction a les propriétés suivantes ($z = a + bi$)

- $e^{w+z} = e^w \cdot e^z$ pour tout $z, w \in \mathbb{C}$
- $|e^z| = e^a$
- $|e^{ib}| = e^0 = 1$ l'axe imaginaire est envoyé sur le cercle trigonométrique (de rayon 1).
- $\boxed{e^{ib} = \cos b + \mathrm{i} \cdot \sin b}$

On en déduit la fameuse formule d'Euler:

$$\boldsymbol{e^{i\pi} = -1}$$

Puissances à exposants irrationnels

5^{π} $3^{\sqrt{2}}$

Comment définir 5^{π} ou $3^{\sqrt{2}}$?

1. Approximation

Nous définissons une suite de nombres rationnels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ telle que $x_n \to x$ lorsque $n \to \infty$, et on pose

$$a^x = \lim_{n\to+\infty} a^{x_n} \qquad \forall a \in \mathbb{R}^+$$

2. Fonction exponentielle et logarithme

Pour tout nombre réel $a > 0$ on pose

$$a^x = e^{x\cdot\ln(a)}$$

Remarque : l'exponentiation à une puissance réelle d'un nombre réel négatif est plus difficile à définir de manière cohérente, car elle peut être *non réelle* et *avoir plusieurs valeurs*. On peut choisir une de ces valeurs, appelée valeur principale, mais il n'y a pas de choix de la valeur principale pour laquelle l'identité

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

est vraie. Par conséquent, l'exponentiation avec une base qui n'est pas un nombre réel positif est généralement considérée comme une fonction multivaluée.

Ex Méthode 1

5^{π} $\qquad \pi = 3{,}1415$

$\pi_1 = \frac{31}{10} \qquad \pi_2 = \frac{314}{100}. \qquad \pi_3 = \frac{3141}{1000}$

$\pi_4 = \frac{31415}{10000} \qquad \pi_n =$

$$5^{\pi_1} = 5^{\frac{31}{10}} = \sqrt[10]{5^{31}}$$

$$5^{\pi_2} = 5^{\frac{314}{100}} = \sqrt[100]{5^{314}}$$

$$5^{\pi_4} = 5^{\frac{31415}{10000}} = \sqrt[10000]{5^{31415}}$$

Méthode 2

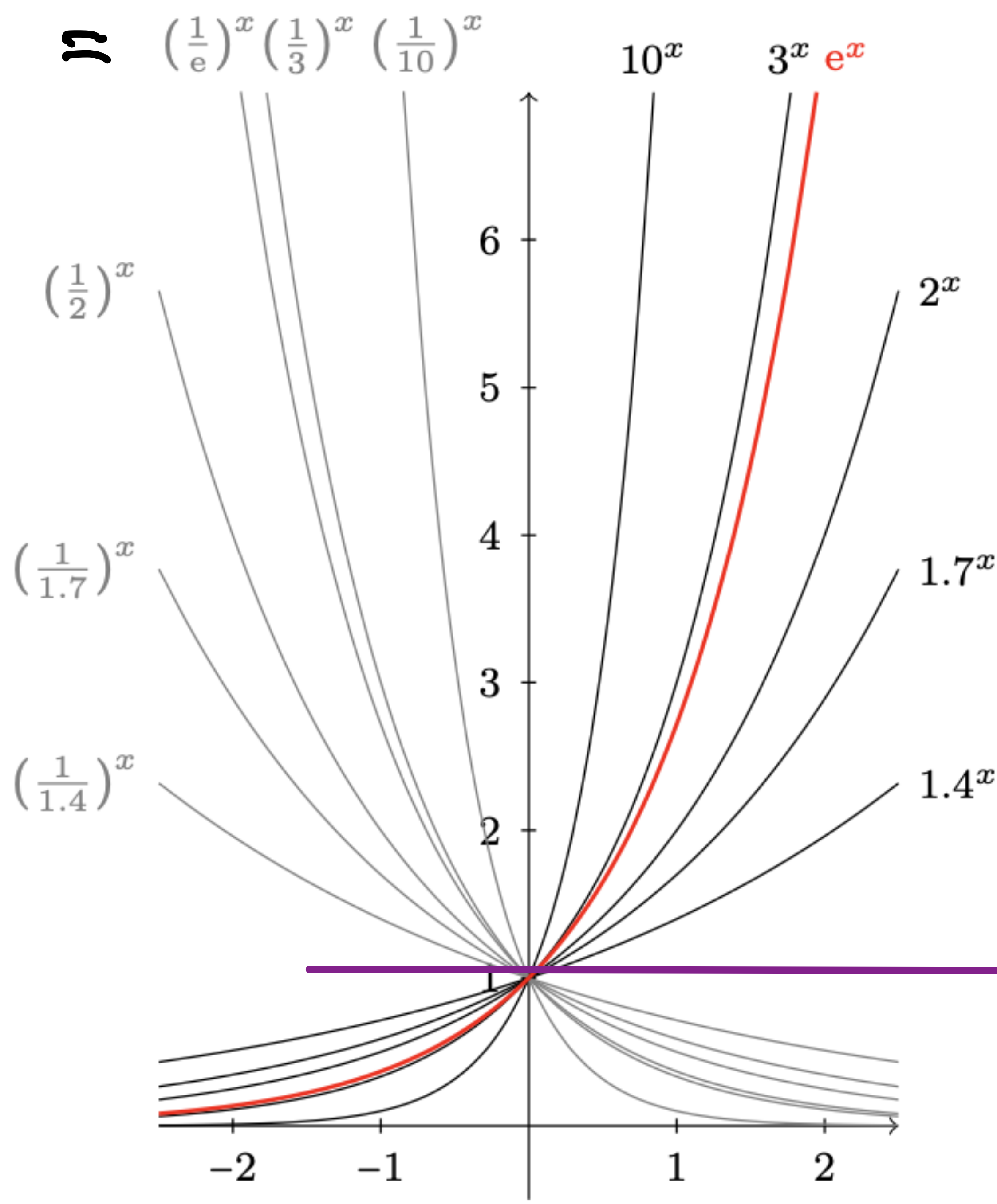
$$a^x = \Big(\underbrace{e^{\ln(a)}}_{a}\Big)^x = e^{x\ln(a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[x\ln(a)]^n}{n!}$$

$$\begin{aligned} e : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\longmapsto e^x \end{aligned}$$ bijective

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \ln(y) \end{aligned}$$

Représentation graphique des fonctions exponentielles

$\left(\frac{1}{e}\right)^x = \frac{1}{e^x} = e^{-x} =$



1^x

Exercice

On plie une feuille de papier de 0.1 mm d'épaisseur en deux, puis en quatre, puis en huit, et ainsi de suite soixante fois. Après combien de plis, serait-il possible d'atteindre une épaisseur qui dépasse : 2 m, 20 m, 1 km, la distance Terre-Lune ?

$$E_n = 0{,}1\,mm \cdot 2^n = 10^{-4}\,[m] \cdot 2^n$$

1) $10^{-4} \cdot 2^n = 2 \Rightarrow 2^n = \frac{2}{10^{-4}} = 2 \cdot 10^4$

$\boxed{n = 15}$

2) $10^{-4} \cdot 2^n = 20 \Rightarrow 2^n = 20 \cdot 10^4 = 2 \cdot 10^5$

$\Rightarrow \boxed{n = 18}$

3) $10^{-4} \cdot 2^n = 1\,km = 10^3 \Rightarrow 2^n = 10^7$ $\boxed{n = 24}$

4/ $10^{-4} \cdot 2^n = 380'000 \text{ km}$

$$= 3{,}8 \cdot 10^5 \text{ km} = 3{,}8 \cdot 10^8 \text{ m}.$$

$$\Rightarrow \quad 2^n = 3{,}8 \cdot 10^{12}$$

$$n \simeq \log_2 (3{,}8 \cdot 10^{12}) \simeq 42$$