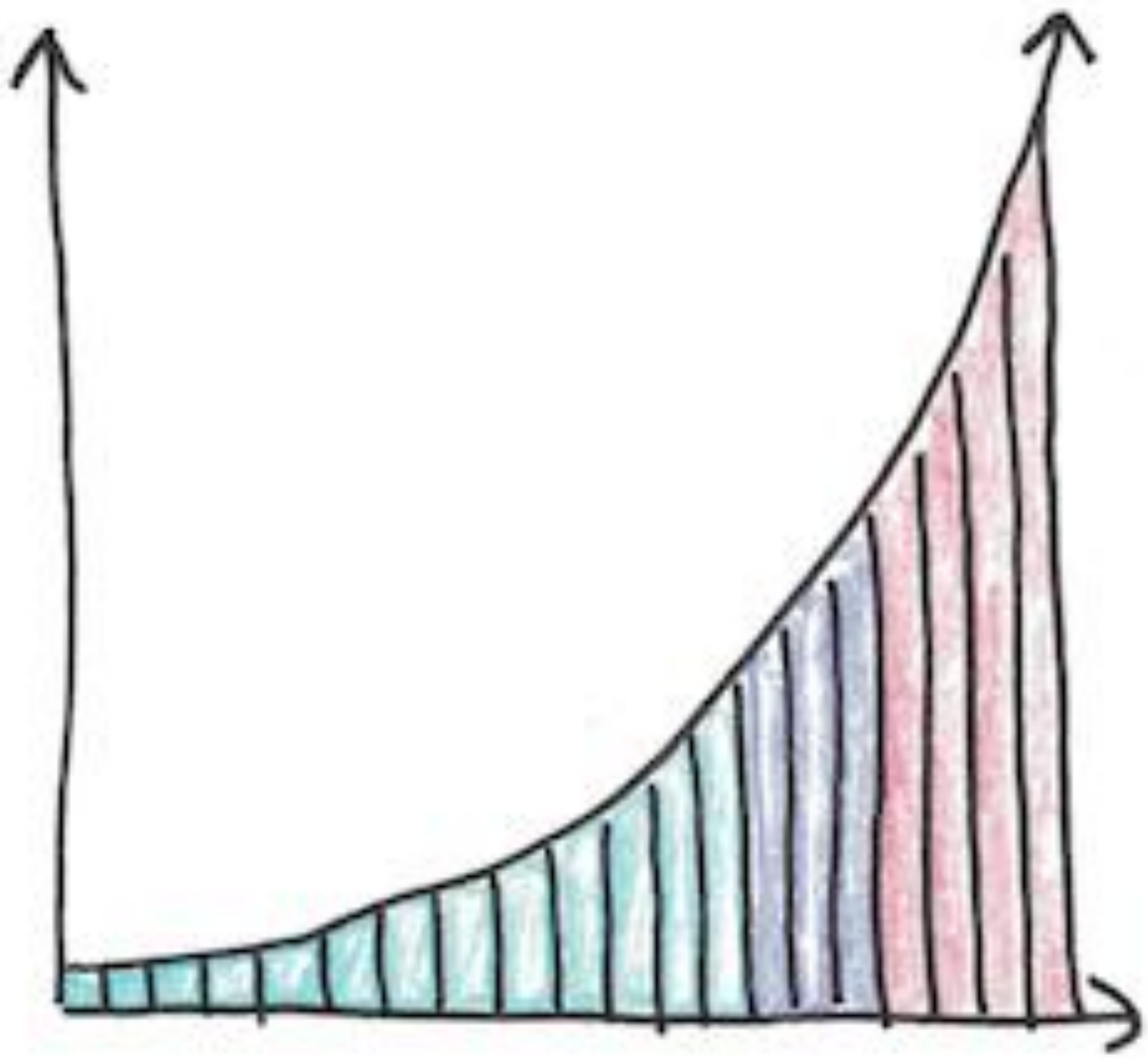


Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Fonctions exponentielles

Philippe Chabloz

Puissances à exposants naturels

Une puissance d'un nombre non-nul est le résultat de la multiplication répétée de ce nombre avec lui-même :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ facteurs}$$

où n est un entier strictement positif ($n \in \mathbb{N}^*$) et a un nombre réel non nul ($a \in \mathbb{R}^*$).

- Un argument de comptage permet d'obtenir la formule suivante :

$$\boldsymbol{a^n \cdot a^m} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ facteurs} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\ facteurs} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n+m\ facteurs} = \boldsymbol{a^{n+m}}$$

qui est valable pour $n, m \in \mathbb{N}^*$.

- « *Pourquoi un nombre à la puissance zéro est égal à 1 ?* » Si l'on souhait que la formule précédente reste vraie pour $n = 0$, alors on doit avoir que

$$a^0 \cdot a^m = a^{m+0} = a^m \ .$$

Ainsi

$$\boldsymbol{a^0 = 1}$$

Puissances à exposants entiers

1. Comment définir a^{-n} pour $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}^*$?

En utilisant la règle des puissances, qui dit que multiplier des puissances revient à additionner leurs exposants, on obtient:

$$a^n \cdot a^{-n} = a^0 = 1$$

d'où la formule

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Nous avons donc défini a^n pour tous $n \in \mathbb{Z}$.

2. Formule pour $(a^m)^n$

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n\ facteurs} = \underbrace{(\overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{m\ facteurs}) \ldots (\overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{m\ facteurs})}_{n\ facteurs} = a^{m \cdot n}$$

Ainsi

$$\boxed{(a^m)^n = a^{n \cdot m} \quad \forall n, m \in \mathbb{Z} \text{ et } a \in \mathbb{R}^*}$$

Elever une puissance à une puissance

- En général

$$(a^b)^c \neq a^{(b^c)}$$

Par exemple : $(2^2)^3 = 64$ et $2^{(2^3)} = 256$

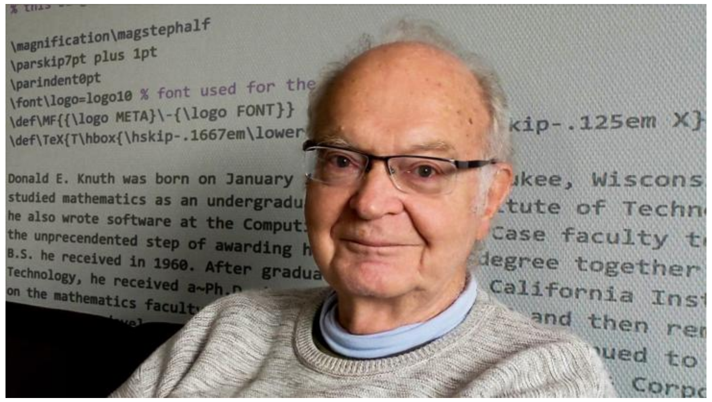
Convention :

$$\boxed{a^{b^c} \text{ signifie } a^{(b^c)}}$$

- En 1976, le mathématicien **Donal Knuth** a inventé une notation pour désigner les opérations qui sont une répétition des puissances :

$$a \uparrow b = a^b$$

$$a \uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow \cdots \uparrow a}_{b \text{ facteurs}} = a^{a^{a^{\cdots}}}$$



Donal Knuth

Puissances à exposants rationnels

Comment définir $6^{\frac{12}{10}}$ ou $25^{\frac{1}{5}}$?

- En utilisant les définitions précédentes, on voit que

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

- Donc $a^{\frac{1}{n}}$ est un nombre qui élevé à la puissance n donne a. Pour éviter les nombres complexes on impose que pour n pair a doit être un réel positif. Alors :

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

- De même

$$a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

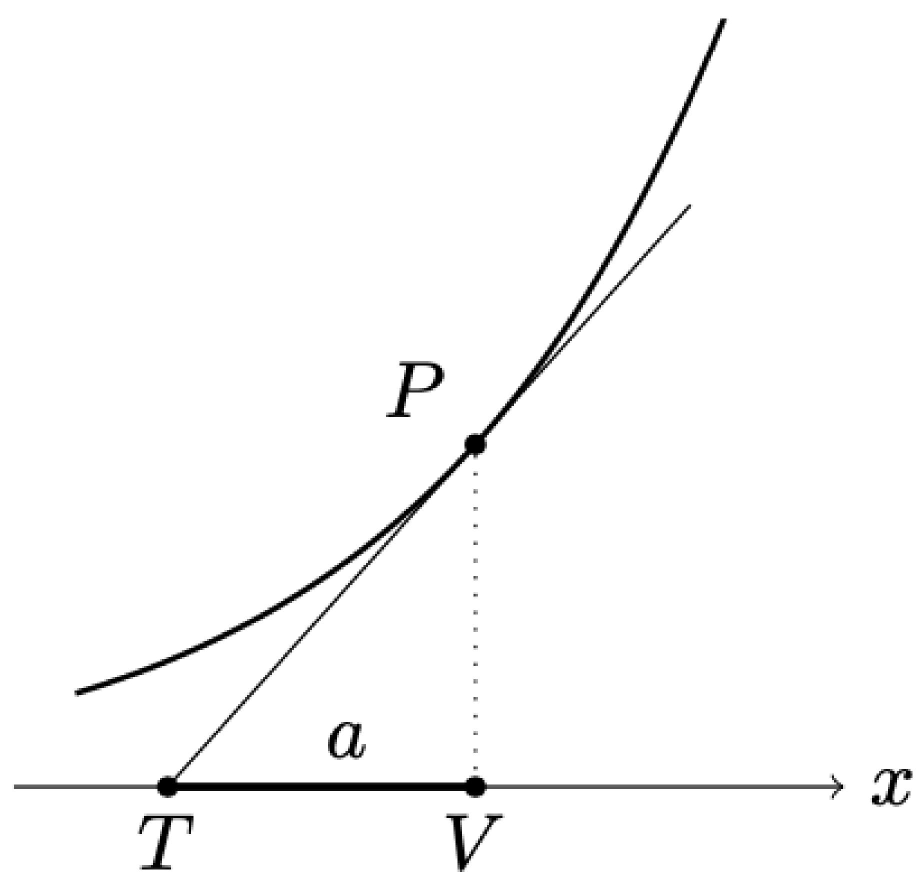
- En général, on a la formule qui définit les puissances à exposant rationnel :

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \qquad \forall n, m \in \mathbb{Z}^*$$

Vers l'exponentielle

Au début du XVIIe siècle, *Florimond de Beaune* pose à *Descartes* le problème suivant:

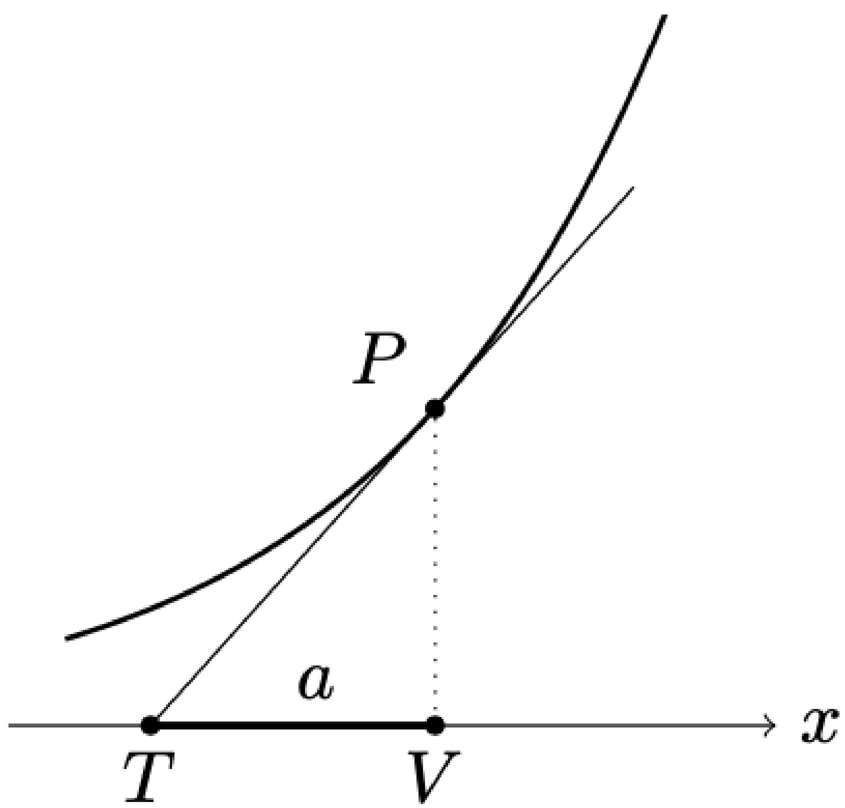
Trouver une courbe $f(x)$ telle que la distance entre V et T, les points où la verticale et la tangente par un point P de la courbe coupent l'axe des x, ait une valeur constante donnée a.



Florimond de Beaune
1601 - 1652

L'idée de Leibniz

- Soit le point $P(x, y)$ sur cette courbe. Augmentons x d'une petite quantité Δx, et considérons un point $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ sur la courbe et aussi sur la droite, alors
$$\Delta y = \frac{\Delta x}{a} y$$
- Ainsi $P_1(x + \Delta x, (1 + \frac{\Delta x}{a})y)$.
- On continue ce processus pour obtenir une success
$$P_n(x + n\Delta x, (1 + \frac{\Delta x}{a})^n y)$$
- Leibniz obtient donc une suite de nombres :
$$y, (1 + \frac{\Delta x}{a})y, (1 + \frac{\Delta x}{a})^2 y, (1 + \frac{\Delta x}{a})^3 y, \ldots$$



- Euler rencontre cette suite dans des problèmes de croissance d'une population et de calcul d'intérêt composé.

Exercice (intérêt composé)

Supposons que 1000.- soient investis à un taux **d'intérêt annuel de 9%** capitalisé (payé) mensuellement. Calculer le nouveau montant du capital après 5 ans.

Formule générale:

$$\boldsymbol{C_t = C_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{tn}}$$

C_0 : capital de départ
i : taux d'intérêt annuel
n : nombre de paiements par année
t : nombre d'années

Intérêt composé

Supposons que la somme de 1000.- soit investie à un taux d'intérêt composé de 9%. Calculer le nouveau montant du capital après **une** année si l'intérêt a été capitalisé *trimestriellement, mensuellement, par semaine, par jour, chaque heure et chaque minute.*

Si nous prenons $C_0 = 1000$,$t = 1$ et $i = 0.09$ dans la formule de l'intérêt composé, alors

$$C_n = 1000 \cdot (1 + \frac{0.09}{n})^n$$

Période d'intérêt	Valeur de n	Capital après une année
Trimestre	4	1093.08
Mois	12	1093.81
Semaine	52	1094.09
Jour	365	1094.16
Heure	8760	1094.17
Minute	525600	1094.17

Nombre d'Euler

Si n tend vers l'infini la valeur de l'expression $(1+\frac{1}{n})^n$ tend vers un nombre irrationnel noté e.

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \approx 2.71828$$

n	**Valeur approchée de** $(1+\frac{1}{n})^n$
1	2.00000000
10	2.59374246
100	2.70481383
1000	2.71692393
10'000	2.71814593
100'000	2.71826824
1'000'000	2.71828169
10'000'000	2.71828169

Nombre d'Euler

Euler a eu l'idée suivante : pour calculer la quantité

$$(1 + \frac{1}{n})^n$$

lorsque n croît indéfiniment (n tend vers $+\infty$) :

Développons à l'aide du binôme de Newton !

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Leonard Euler
1707 - 1783

EPFL

En conclusion on a deux définitions de e :

$$e = \lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k\,!}$$

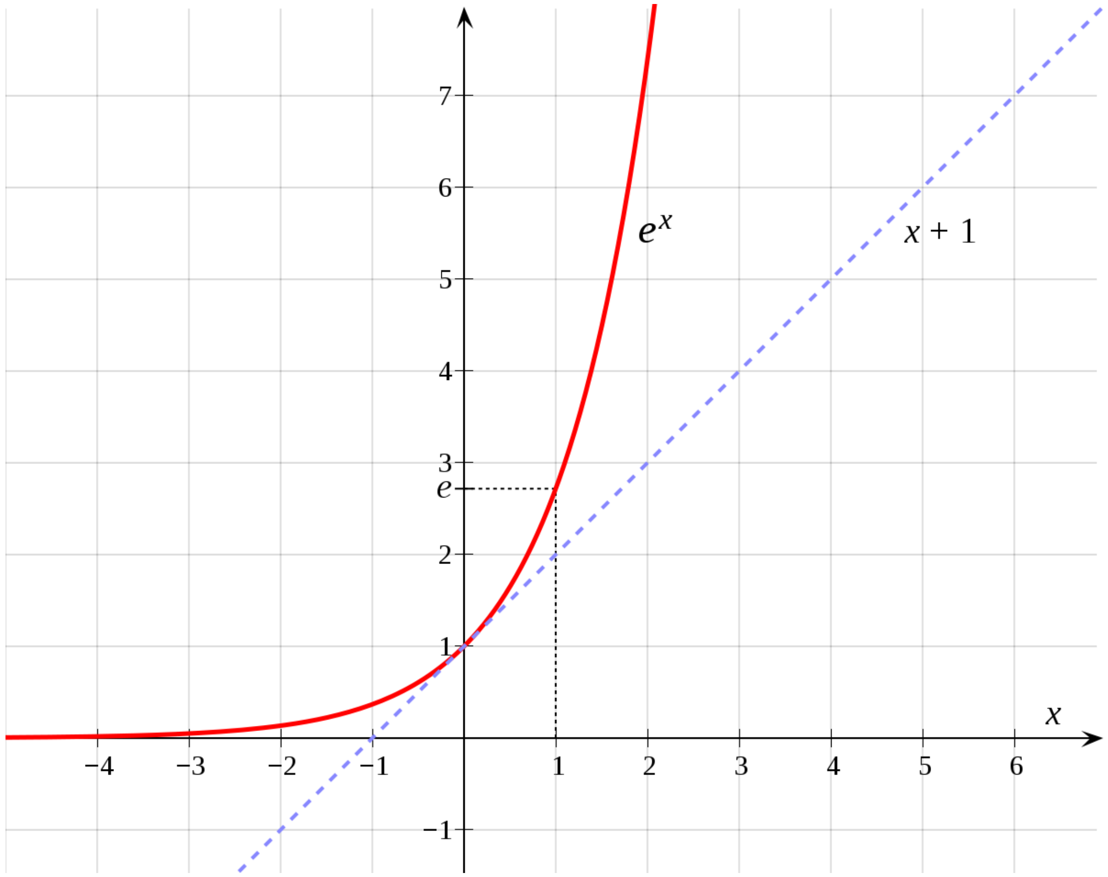
La seconde converge beaucoup plus vite vers e

n	**Valeur de** $(1 + \frac{1}{n})^n$	**Valeur de** $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}$
1	2	2
2	2.25	2.5
3	2.37037037	2.66666667
4	2.44140625	2.70833333
5	2.48832	2.71666667
6	2.52162637	2.71805556
10	2.59374246	2.7182818
13	2.62060089	2.718281828

La fonction exponentielle

En utilisant la même technique que celle exposée ci-dessus, Euler a généralisé cet argument en démontrant que pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$$



Cette fonction répond à la question posée par *Florimond de Beaune* car si $P(c, e^c)$ est un point sur le graphe, alors la tangente à P à une pente égale à e^c (voir la *série d'exercice* 2).

Propriétés de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle

$$\begin{aligned} exp : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^x \end{aligned}$$

est une fonction derivable (et donc continue) ayant les propriétés suivantes :

1. La fonction exp est strictement monotone croissante avec un taux de croissance donnée par $exp(x)$ qui devient de plus en plus élevé.
2. $exp(\mathbb{R}) =]0; +\infty[$. Pour tout $y > 0$ il existe donc exactement une valeur $x \in \mathbb{R}$ telle que $e^x = y$.
3. On a $e^0 = 1$ et $e^1 = e$
4. On a $e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
5. On a $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

L'exponentielle complexe

- On peut étendre l'exponentielle réelle à tous les nombre complexes en posant pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ \dots \ = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Cette fonction a les propriétés suivantes ($z = a + bi$)

- $e^{w+z} = e^w \cdot e^z$ pour tout $z, w \in \mathbb{C}$
- $|e^z| = e^a$
- $|e^{ib}| = e^0 = 1$ l'axe imaginaire est envoyé sur le cercle trigonométrique (de rayon 1).
- $e^{ib} = \cos b + \mathrm{i} \cdot \sin b$

On en déduit la fameuse formule d'Euler:

$$\boldsymbol{e^{i\pi} = -1}$$

Puissances à exposants irrationnels

Comment définir 5^{π} ou $3^{\sqrt{2}}$?

1. Approximation

Nous définissons une suite de nombres rationnels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ telle que $x_n \to x$ lorsque $n \to \infty$, et on pose

$$a^x = \lim_{n\to+\infty} a^{x_n} \qquad\qquad \forall a \in \mathbb{R}^+$$

2. Fonction exponentielle et logarithme

Pour tout nombre réel $a > 0$ on pose

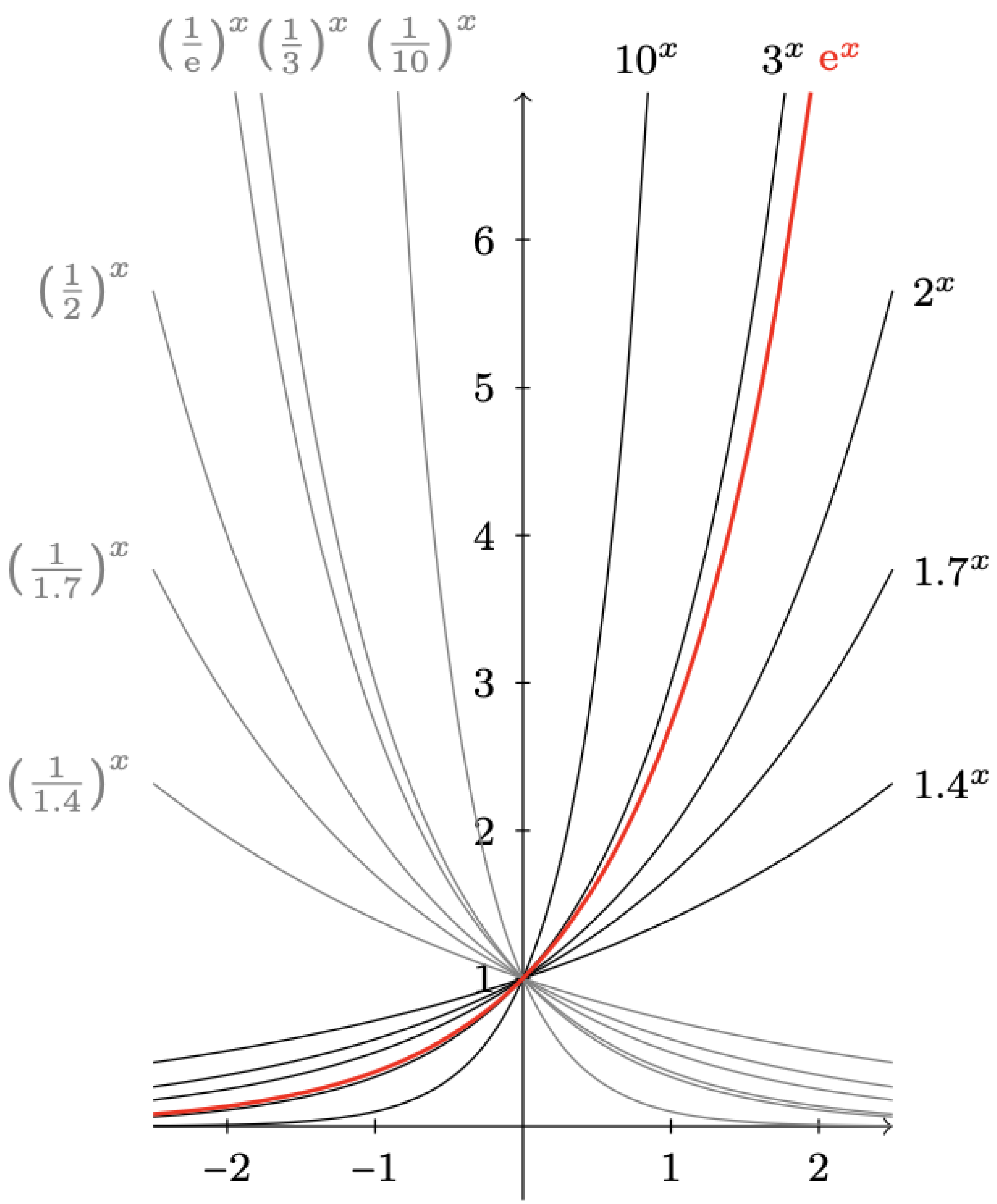
$$a^x = e^{x\cdot\ln(a)}$$

Remarque : l'exponentiation à une puissance réelle d'un nombre réel négatif est plus difficile à définir de manière cohérente, car elle peut être *non réelle* et *avoir plusieurs valeurs*. On peut choisir une de ces valeurs, appelée valeur principale, mais il n'y a pas de choix de la valeur principale pour laquelle l'identité

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

est vraie. Par conséquent, l'exponentiation avec une base qui n'est pas un nombre réel positif est généralement considérée comme une fonction multivaluée.

Représentation graphique des fonctions exponentielles



Exercice

On plie une feuille de papier de 0.1 mm d'épaisseur en deux, puis en quatre, puis en huit, et ainsi de suite soixante fois. Après combien de plis, serait-il possible d'atteindre une épaisseur qui dépasse : 2 m, 20 m, 1 km, la distance Terre-Lune ?