

Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Fonctions logarithmes

Philippe Chabloz

Définition de e^x

(Rappel de hier)

Converge $\forall x \in \mathbb{C}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots +$$

$$0! = 1$$

Si $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

$$e^x = e^{p/q} = \sqrt[q]{e^p} !!$$

Avantage : on peut prendre x dans \mathbb{Q}
et aussi dans \mathbb{R} ou même \mathbb{C}

e^i a un sens !!

Théorème (Euler)

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$$

\Rightarrow

$$e^{i\pi} = -1$$

Et donc, c'est quoi un logarithme ?

- ❖ *Au niveau le plus élémentaire*, le logarithme (en base 10) peut être considéré comme une fonction qui compte le nombre de zéros de son argument. Ainsi

$$\log_{10}(1) = 0$$

$$\log_{10}(10) = 1$$

$$\log_{10}(100) = 2$$

$$\log_{10}(1000) = 3$$

$$10^3 = 1000$$

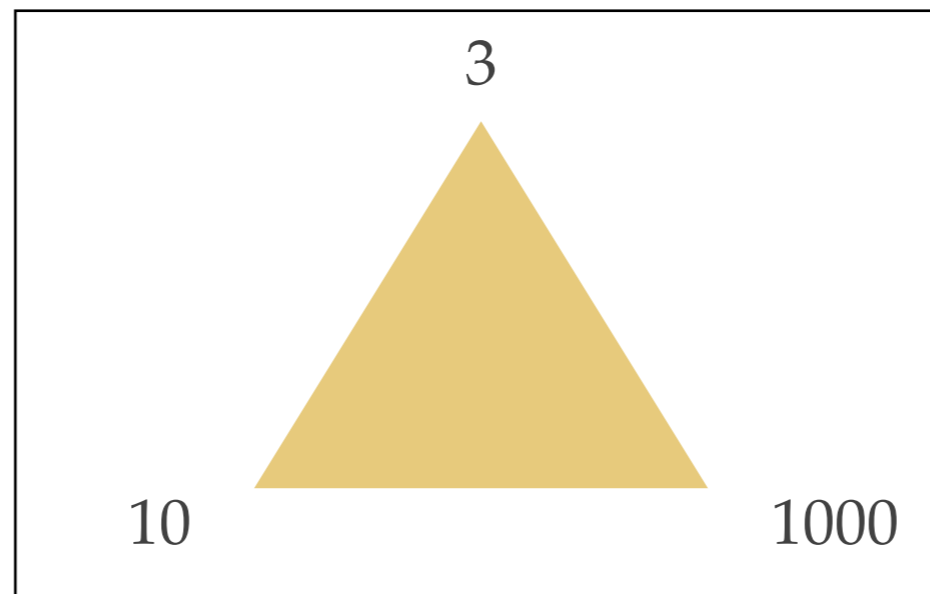
- ❖ En généralisant pour chaque $n \in \mathbb{Z}$:

$$\log_{10}(10^n) = n$$

Donc, par exemple

$$0,01 = \frac{1}{100} = 10^{-2} \quad \log_{10}(0,01) = -2$$

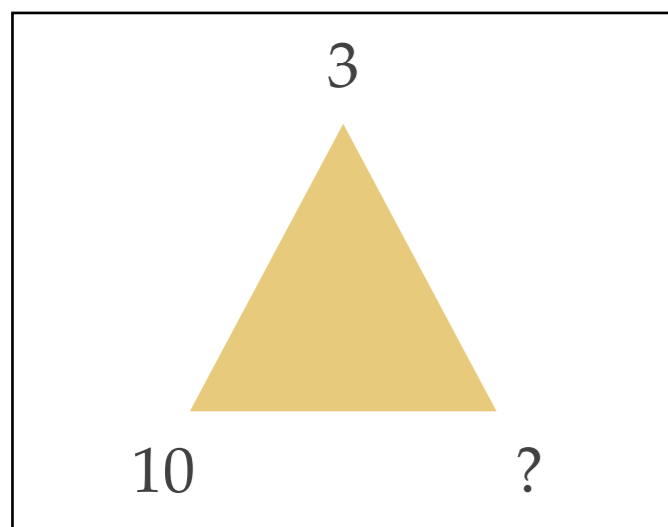
Puissances, racines et logarithmes



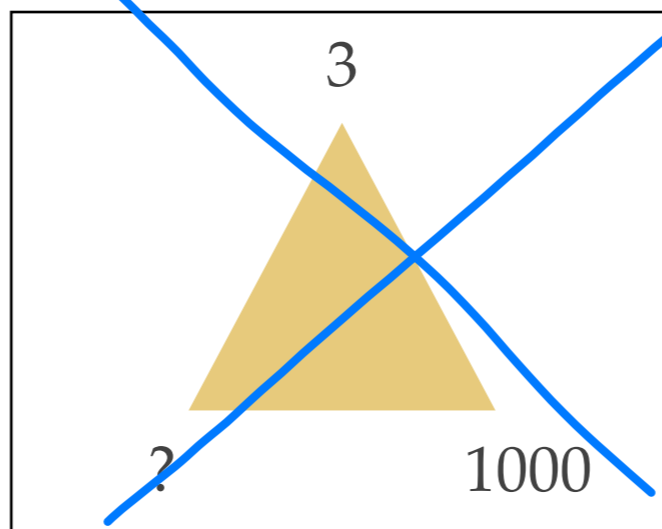
$$10^3 = 1000$$

Trois notations pour une seule relation :

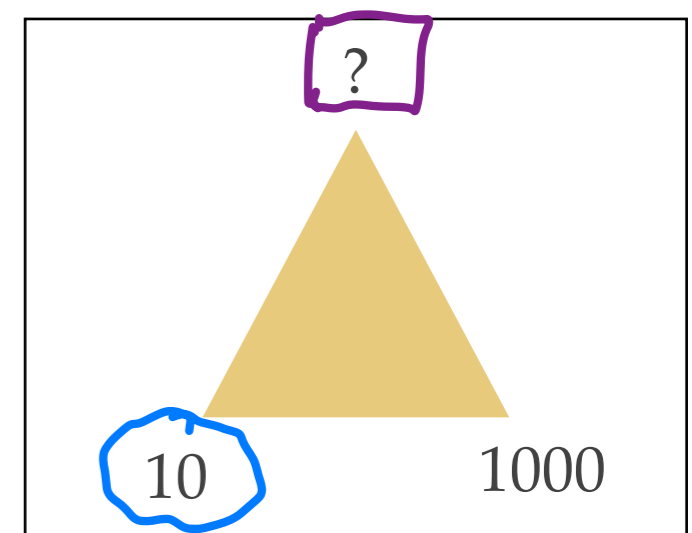
$$10^3 = 1000$$



$$\sqrt[3]{1000} = 10$$



$$\log_{10}(1000) = 3$$



Et donc, c'est quoi un logarithme ?

- ❖ De même un logarithme en base 2 peut être considéré comme la puissance à laquelle j'élève 2 pour obtenir le nombre dont je prends le logarithme. Ainsi

$$\log_2(64) = 6$$

$$\log_2(1) = 0$$

$$\log_2(2) = 1$$

$$\log_2(4) = 2$$

$$\log_2(8) = 3$$

$$64 = (2^3)^2 = 2^6$$

$$\text{car } 2^3 = 8$$

- ❖ En généralisant pour chaque $n \in \mathbb{Z}$:

$$\log_2(2^n) = n$$

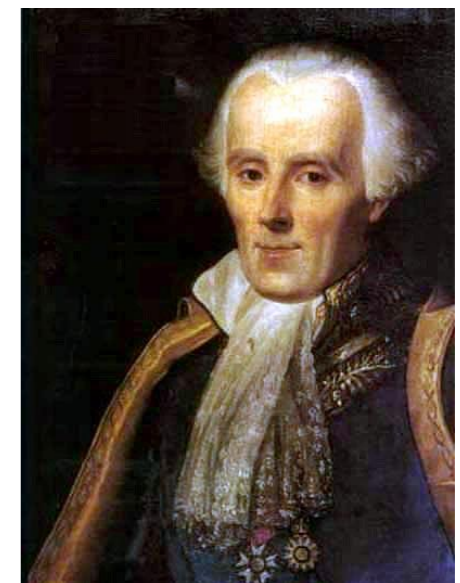
Donc, par exemple

$$\log_2(1025) \approx 10 \quad \text{puisque} \quad 2^{10} = 1024$$

Un peu d'histoire

- ❖ Sémantique : *logos* = rapport et *arithmeticos* = nombre.
- ❖ Vers la fin du XVIIe siècle, les développements de l'astronomie poussent les mathématiciens à chercher des méthodes de simplifications des calculs et en particulier le remplacement des multiplications par des sommes.
- ❖ En 1614, John Napier publie son traité «*Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*». Il ne songe pas qu'il est en train de créer de nouvelles fonctions, mais seulement des tables de correspondance entre deux séries de valeurs possédant la propriété suivante : à un produit dans une colonne correspond une somme dans une autre.
- ❖ Pierre-Simon de Laplace, mathématicien et astronome français, disait à propos des logarithmes :

L'invention des logarithmes, en réduisant le temps passé aux calculs de quelques mois à quelques jours, double pour ainsi dire la vie des astronomes.



Pierre-Simon de Laplace
1749 - 1827

Un peu d'histoire

Nous sommes au XIXe siècle et nous souhaitons effectuer rapidement l'opération

$$232 \cdot 1412$$

...sans effectuer la multiplication. Nous disposons pour cela des tables de logarithmes !

1. Repérer 232 dans la table de logarithmes. Lire le log qui lui correspond. La valeur indiquée dans la table est

$$\log(232) \approx 2.3654880$$

2. Faire de même pour 1412 : on lit que

$$\log(1412) \approx 3.1498347$$

3. Additionner les deux valeurs obtenues :

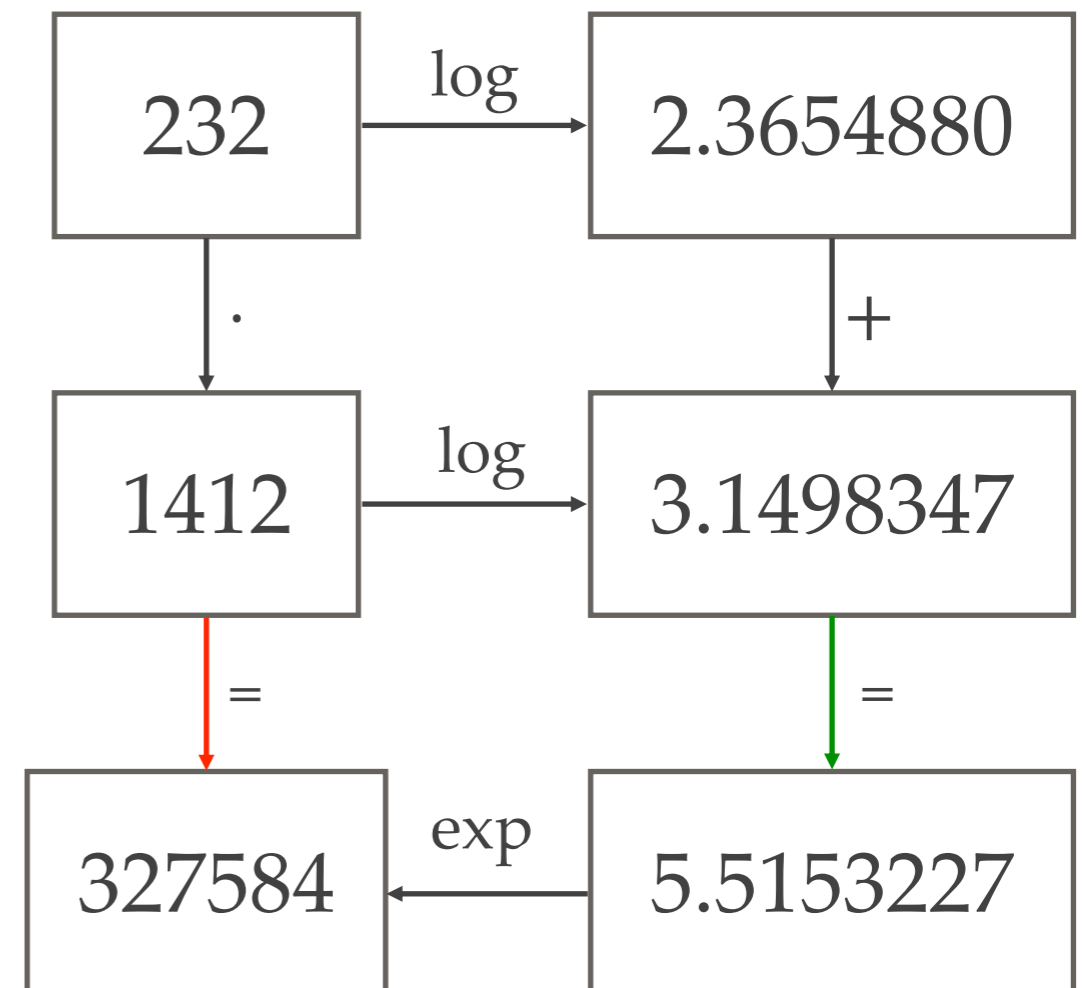
$$3.1498347 + 2.3654880 = 5.5153227$$

4. Rechercher le nombre dont 5.5153227 est le logarithme en utilisant la table de logarithmes *dans l'autre sens* :

$$5.5153227 \approx \log(327584)$$

5. En déduire la valeur de la multiplication :

$$232 \times 1412 \approx 327584$$



Conditions d'existence d'un logarithme

- ❖ Le logarithme ne *mange jamais négatif* : par exemple

$$\log_{10}(-10) \text{ n'a pas de sens !!!}$$

$$1^x = 1$$

- ❖ En fait, le logarithme d'un nombre négatif... est un *nombre complexe*. Donc, pour l'instant, nous dirons que, par exemple :

$$\log_{10}(-10) \text{ n'est pas défini (dans l'ensemble } \mathbb{R}\text{)}.$$

- ❖ Tous les nombres négatifs, ainsi que 0, 1 et présentent un «*problème potentiel*» en tant que base d'une fonction puissance. **Pour cette raison, nous n'autorisons que les nombres strictement positifs autres que 1 comme base du logarithme.** Donc, par exemple,

$$\log_{-10}(10) \text{ n'est pas défini (dans l'ensemble } \mathbb{R}\text{)}.$$

Pour écrire en toute sécurité $\log_b(a)$ il faut que :

$$\begin{array}{l} b > 0 \text{ et } b \neq 1 \\ a > 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & (-2)^{3/2} \\ &= \sqrt[2]{(-2)^3} \end{aligned}$$

n'existe pas = ~~$\sqrt[2]{-8}$~~

Définition de $\log_b(a)$

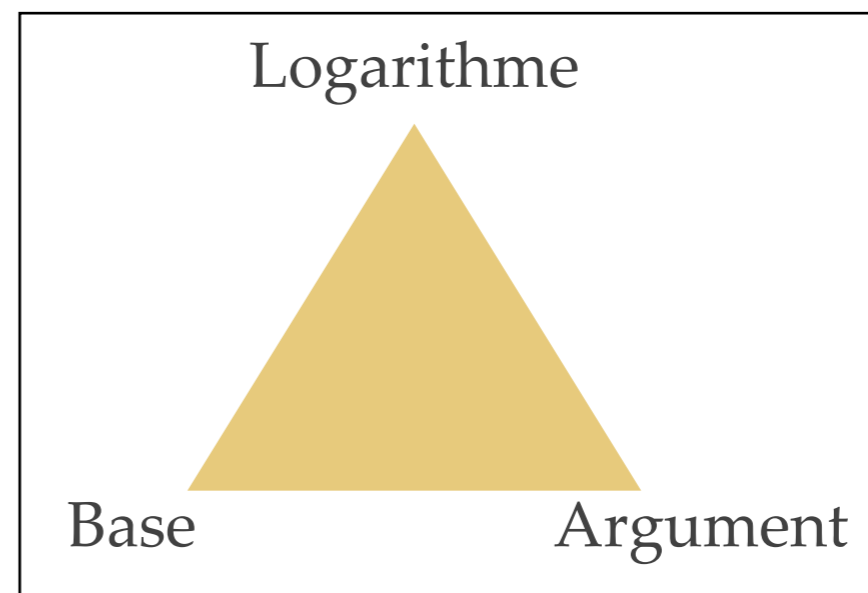
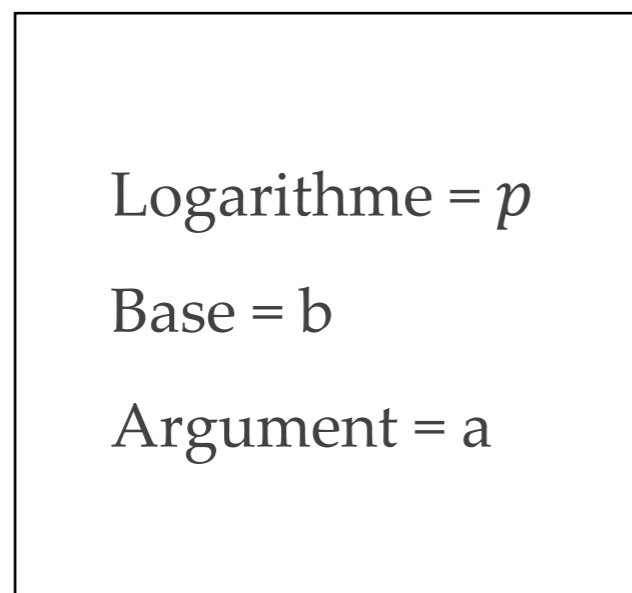
Soit $a > 0$, $b > 0$ et $b \neq 1$, alors le **logarithme en base b de a** est défini par

$$\log_b(a) = p \quad \text{si et seulement si} \quad b^p = a$$

- ❖ Le nombre p , donc le logarithme, correspond à l'exposant.
- ❖ Nous dirons que :

p est réciproque de b^x

Le logarithme est l'exposant auquel doit être élevée la base pour obtenir l'argument.



Base d'un logarithme

Dans l'expression

$$\log_b(a) = p$$

b est appelé la **base du logarithme**

Bases particulières :

1. *Ingénierie* : $b = 10$ (logarithme décimal)

Exemples : décibels, pH en chimie, échelle de Richter

2. *Informatique* : $b = 2$ (logarithme binaire)

Exemples : musique (octave = doublement de fréquence)

3. *Mathématique* : $b = e$ (logarithme népérien ou naturel)

$$\log_{10} = \log$$

$$\ln(x) = \log_e(x)$$

$$b^{(\cdot)} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

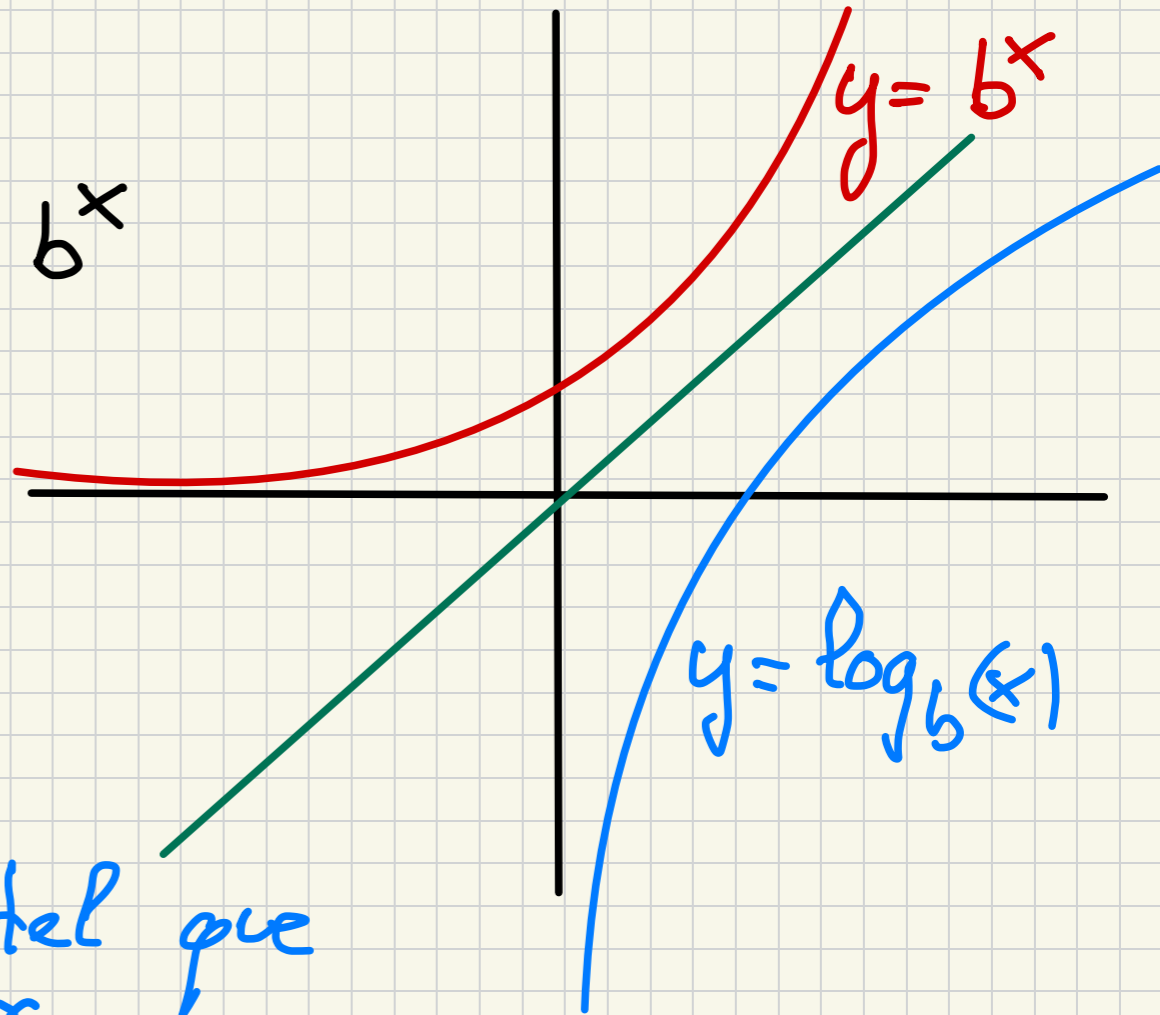
$$\begin{aligned} b > 0 \\ b \neq 1 \end{aligned}$$

$$x$$

$$\longmapsto$$

$$\mathbb{R}_+^*$$

$$y = b^x$$



$$\log_b :$$

$$\mathbb{R}_+^* \longrightarrow$$

$$\mathbb{R}$$

$$y \longmapsto$$

$$x$$

$$\text{tel que } b^x = y$$

$$\bullet \log_b(b^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet b^{\log_b(y)} = y \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^*$$

5 propriétés du logarithme

	Version logarithme	Version exponentielle
1. Produit	$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$	$b^x \cdot b^y = b^{x+y}$
2. Quotient	$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$	$\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y} \quad $
3. Puissance	$\log_b(x^y) = y \cdot \log_b(x) \quad $	$(b^x)^y = b^{yx}$
4. Changement de base	$\log_a(x) = \log_a(b) \cdot \log_b(x)$	$\Rightarrow \log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$
5.	$\log_b(a) = \frac{1}{\log_a(b)}$	

$$\log_{10}(x) = \frac{\log_e(x)}{\log_e(10)} = \frac{\ln(x)}{\underbrace{\ln(10)}_{\approx 2,3}}$$

$$\log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \quad \log_2(10) \approx \frac{1}{0,30}$$

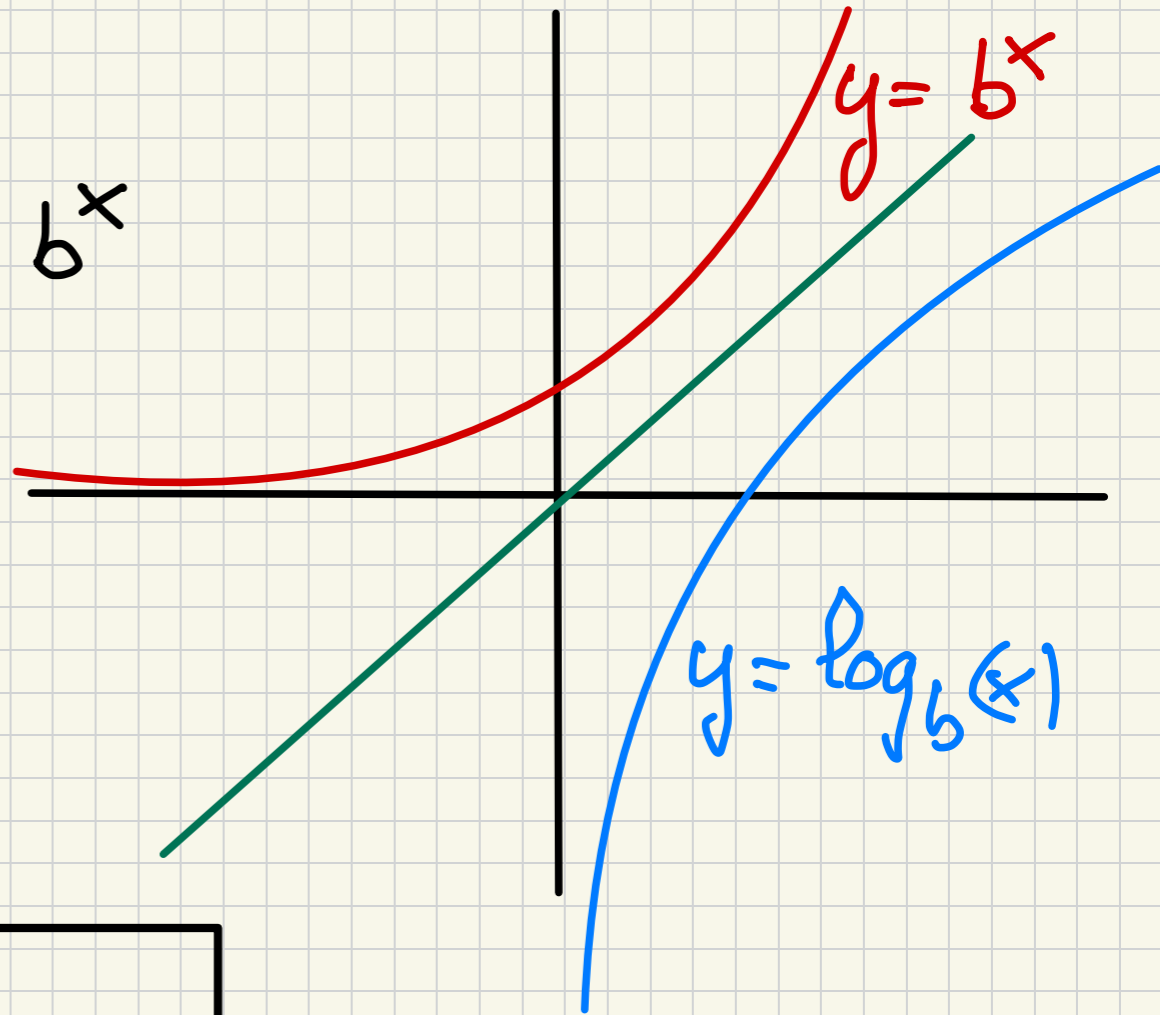
$$\log_2(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(2)} \approx 0,30 \quad \approx 3,32$$

$$b^{(\cdot)} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

$$\begin{aligned} b &> 0 \\ b &\neq 1 \end{aligned}$$

 x \longmapsto

$$y = b^x$$



$$\log_b(b) = 1$$

$$b^0 = 1 \Rightarrow \log_b(1) = 0$$

$$b^{x+y} = b^x \cdot b^y \Rightarrow \log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

$$b^{x-y} = b^x \cdot b^{-y} = \frac{b^x}{b^y} \Rightarrow \log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$$

• $\log_b(x^y) = z \quad (\Leftrightarrow) \quad b^z = x^y \quad x = b^{\log_b(x)}$

définition
du \log_b

$$= (b^{\log_b(x)})^y$$

$$= b^{y \log_b(x)}$$

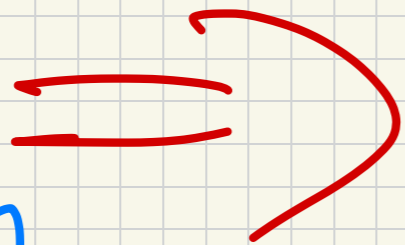
b^x est injectif $\rightarrow \Rightarrow z = y \log_b(x)$

$$\log_b(x^y) = y \cdot \log_b(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\forall y \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = f(y)$$



$$x = y$$

seulement si f est injective

!!

Changement de base

$$\log_a(x) = \log_a(b) \cdot \underbrace{\log_b(x)}_y$$

$$b^y = x \quad (\Leftrightarrow) \quad \underbrace{\log_a(b^y)}_{\log_a} = \log_a(x)$$

propriété 3 $\Rightarrow y \cdot \log_a(b) = \log_a(x)$

$$\underbrace{\log_b(x)}_y \cdot \log_a(b) = \log_a(x)$$

déf. de y

#

$$\log_b(a) = \frac{1}{\log_a(b)}$$

Dém:

$$b^y = a$$

$$\left| \begin{array}{l} (1/y) \\ \hline \log \end{array} \right.$$

$$\left((b^y)^{1/y} \right) = a^{1/y}$$

$$b = a^{1/y}$$

$$\Leftrightarrow \log_a(b) = \frac{1}{y}$$

$$y = \frac{1}{\log_a(b)}$$

#

Logarithme naturel

La fonction $\ln(x)$ est par définition la fonction réciproque de la fonction $\exp(x)$.

Donc on a pour tout $y > 0$

$$e^{\ln(y)} = y$$

et pour tout x réel:

$$\ln(e^x) = x$$

Pour tout $a > 0, a \neq 1$ on a

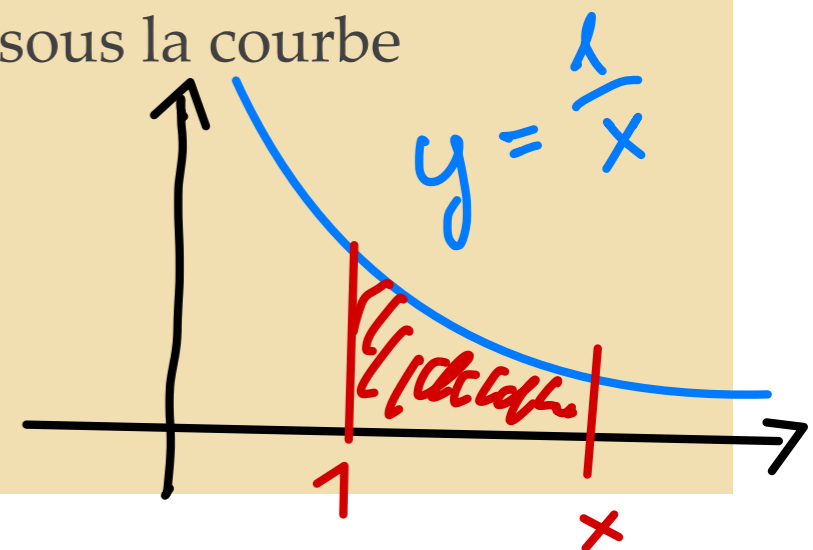
$$a^x = \underbrace{(e^{\ln(a)})}_a^x = e^{x \ln(a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln(a))^n}{n!}$$

Remarque: on peut aussi définir la fonction $\ln(x)$ comme l'aire sous la courbe

$$y = \frac{1}{t}$$

entre 1 et x :

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$



Série géométrique

$$(x-1)/(x+1) = x^2 - 1$$

A partir de l'identité

$$(x - 1)(x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1) = x^{n+1} - 1$$

On en déduit que si $x \neq 1$

$$(x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

En faisant tendre n vers l'infini et en supposant que $|x| < 1$, alors x^{n+1} tend vers 0 et on obtient que

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Série géométrique de raison x

Exemple (paradoxe de Zénon) :

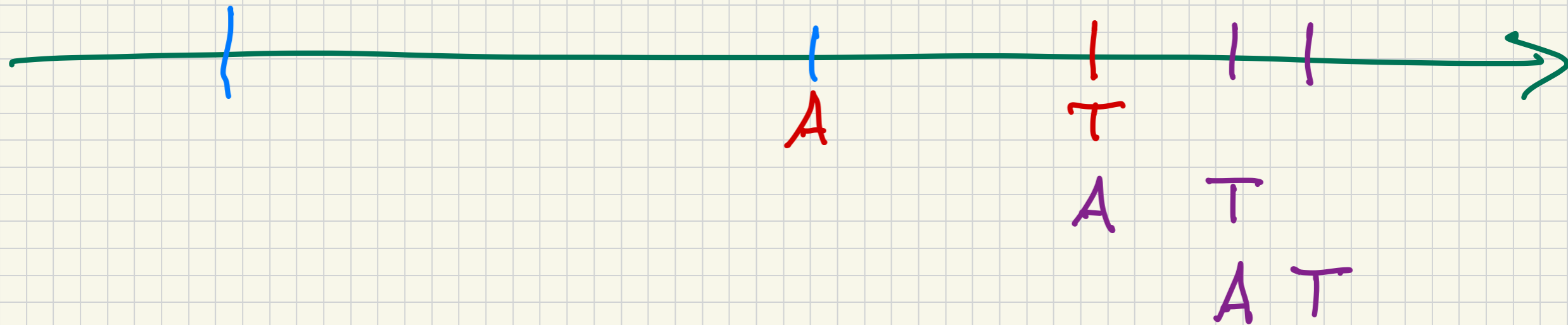
$$x = \frac{1}{2}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Achille

Tortue

1m.



$$v_A = 2 \text{ m/s}$$

$$v_T = 1 \text{ m/s}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 2$$

Série du logarithme naturel

Comme pour l'exponentielle, on peut calculer le logarithme naturel à l'aide d'une série, c'est-à-dire d'une somme infinie de terme.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Mais ici, la série ne converge que pour $x \in]-1; 1]$

Comment fait une machine à calculer pour calculer $\ln(1.5)$?

Et $\ln(10)$?

$$\ln(1.5) = \ln(1 + \underbrace{0.5}_x) = 0.5 - \frac{(0.5)^2}{2} + \frac{(0.5)^3}{3} - \frac{(0.5)^4}{4} + \dots$$

$$\underline{\text{Ex 2}} : \ln(2) = \ln(1+1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

$$\ln(10) = \ln\left(\left(\frac{1}{10}\right)^{-1}\right) = -\ln\left(\frac{1}{10}\right) = -\ln\left(1 - \frac{9}{10}\right)$$

$x = \frac{9}{10}$

$$= -\left[+x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right]$$

$$= -\left[-0,9 - \frac{(0,9)^2}{2} - \frac{(0,9)^3}{3} - \frac{(0,9)^4}{4} - \dots \right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(0,9)^n}{n}$$

Représentation graphique des fonctions logarithmiques

