

Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Fonctions logarithmes

Philippe Chabloz

Et donc, c'est quoi un logarithme ?

- ❖ *Au niveau le plus élémentaire*, le logarithme (en base 10) peut être considéré comme une fonction qui compte le nombre de zéros de son argument. Ainsi

$$\log_{10}(1) = 0$$

$$\log_{10}(10) = 1$$

$$\log_{10}(100) = 2$$

$$\log_{10}(1000) = 3$$

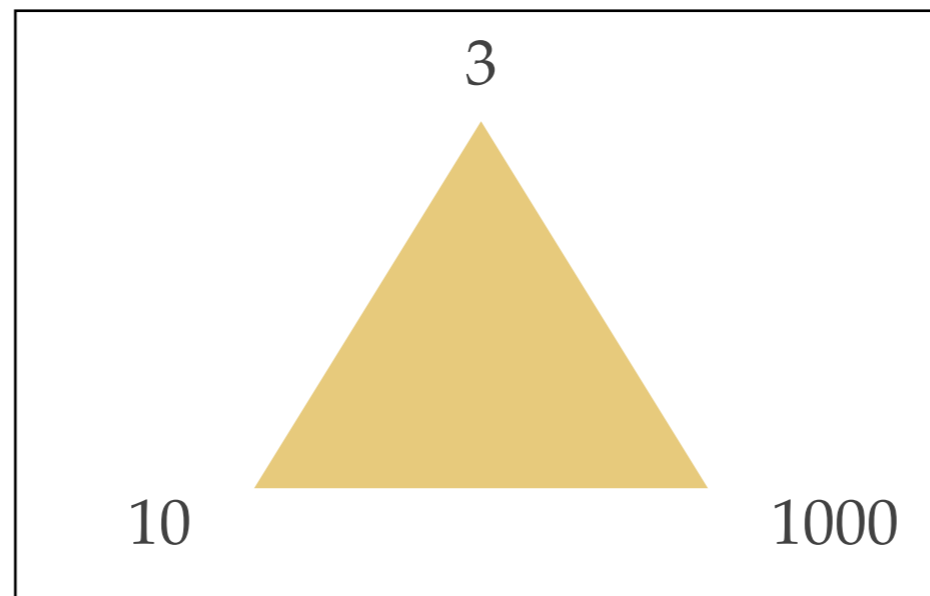
- ❖ En généralisant pour chaque $n \in \mathbb{Z}$:

$$\log_{10}(10^n) = n$$

Donc, par exemple

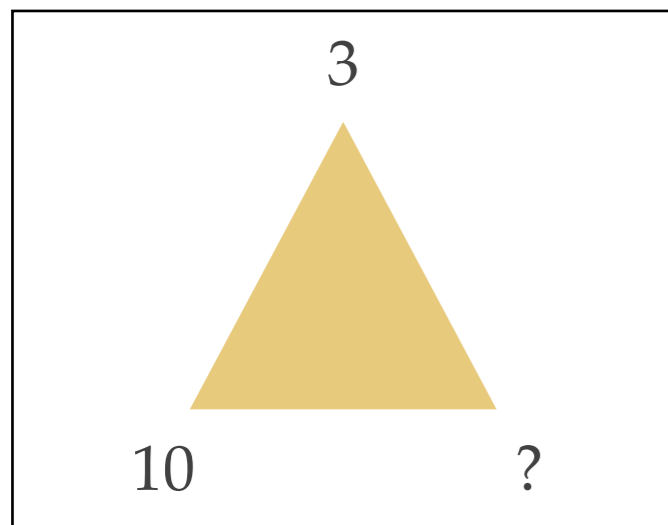
$$\log_{10}(0,01) = -2$$

Puissances, racines et logarithmes

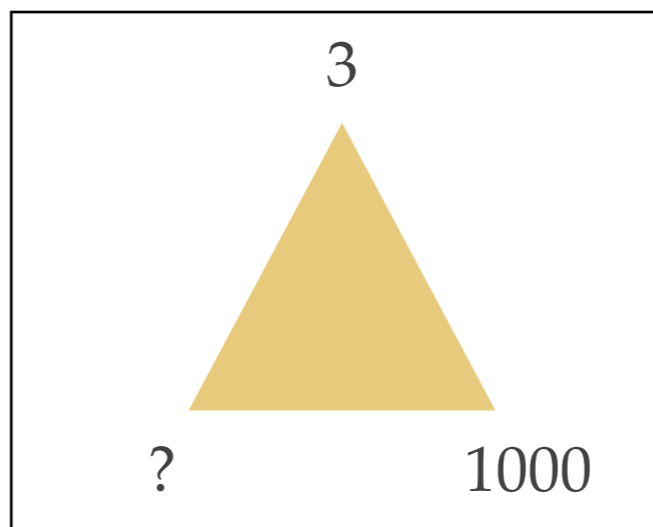


Trois notations pour une seule relation :

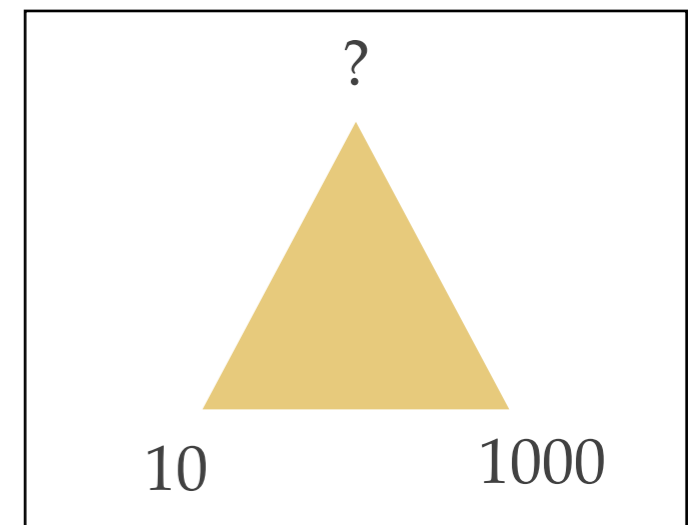
$$10^3 = 1000$$



$$\sqrt[3]{1000} = 10$$



$$\log_{10}(1000) = 3$$



Et donc, c'est quoi un logarithme ?

- ❖ De même un logarithme en base 2 peut être considéré comme la puissance à laquelle j'éleve 2 pour obtenir le nombre dont je prends le logarithme. Ainsi

$$\log_2(1) = 0$$

$$\log_2(2) = 1$$

$$\log_2(4) = 2$$

$$\log_2(8) = 3$$

- ❖ En généralisant pour chaque $n \in \mathbb{Z}$:

$$\log_2(2^n) = n$$

Donc, par exemple

$$\log_2(1025) \approx 10 \quad \text{puisque} \quad 2^{10} = 1024$$

Un peu d'histoire

- ❖ Sémantique : *logos* = rapport et *arithmeticos* = nombre.
- ❖ Vers la fin du XVIIe siècle, les développements de l'astronomie poussent les mathématiciens à chercher des méthodes de simplifications des calculs et en particulier le remplacement des multiplications par des sommes.
- ❖ En 1614, John Napier publie son traité «*Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*». Il ne songe pas qu'il est en train de créer de nouvelles fonctions, mais seulement des tables de correspondance entre deux séries de valeurs possédant la propriété suivante : à un produit dans une colonne correspond une somme dans une autre.
- ❖ Pierre-Simon de Laplace, mathématicien et astronome français, disait à propos des logarithmes :

L'invention des logarithmes, en réduisant le temps passé aux calculs de quelques mois à quelques jours, double pour ainsi dire la vie des astronomes.



Pierre-Simon de Laplace
1749 - 1827

Un peu d'histoire

Nous sommes au XIXe siècle et nous souhaitons effectuer rapidement l'opération

$$232 \cdot 1412$$

...sans effectuer la multiplication. Nous disposons pour cela des tables de logarithmes !

1. Repérer 232 dans la table de logarithmes. Lire le log qui lui correspond. La valeur indiquée dans la table est

$$\log(232) \approx 2.3654880$$

2. Faire de même pour 1412 : on lit que

$$\log(1412) \approx 3.1498347$$

3. Additionner les deux valeurs obtenues :

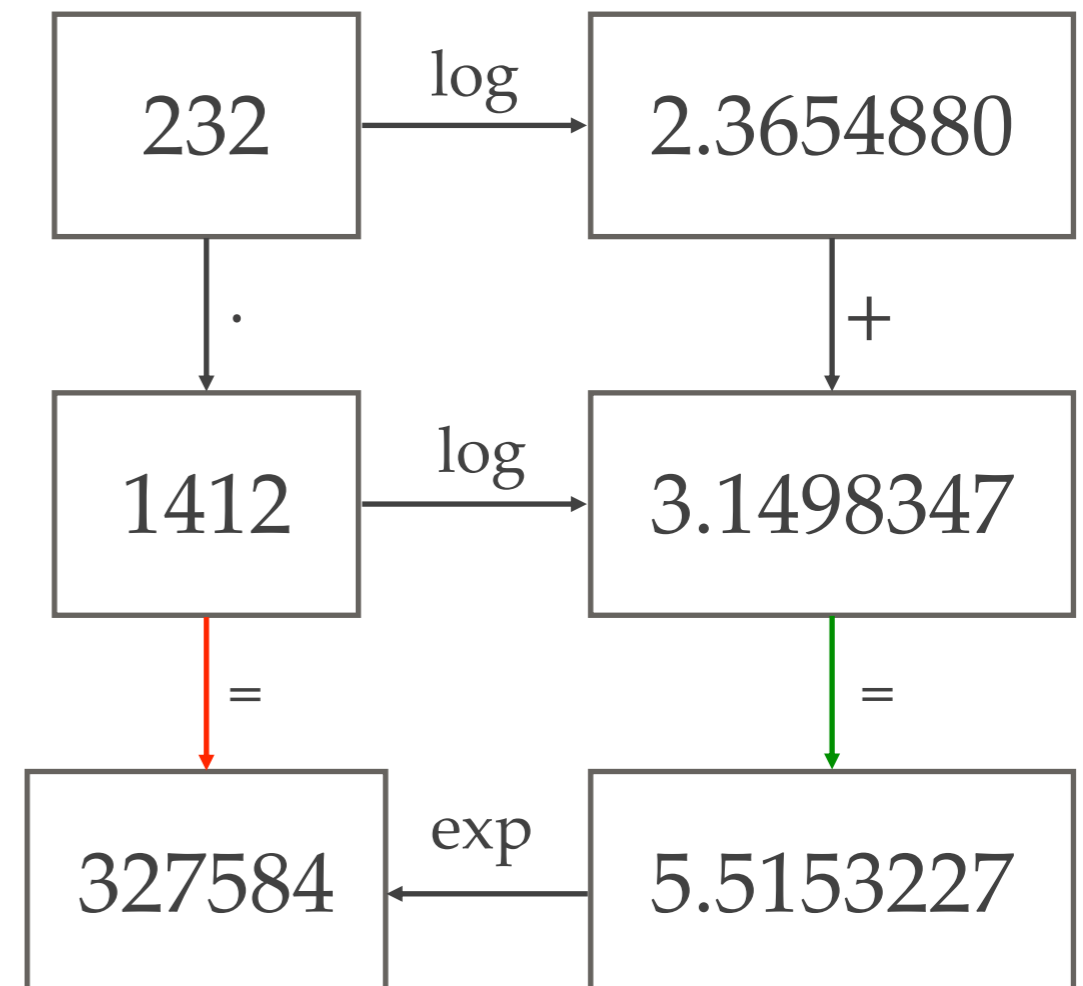
$$3.1498347 + 2.3654880 = 5.5153227$$

4. Rechercher le nombre dont 5.5153227 est le logarithme en utilisant la table de logarithmes *dans l'autre sens* :

$$5.5153227 \approx \log(327584)$$

5. En déduire la valeur de la multiplication :

$$232 \times 1412 \approx 327584$$



Conditions d'existence d'un logarithme

- ❖ Le logarithme ne *mange jamais négatif* : par exemple

$$\log_{10}(-10) \text{ n'a pas de sens !!!}$$

- ❖ En fait, le logarithme d'un nombre négatif... est un *nombre complexe*. Donc, pour l'instant, nous dirons que, par exemple :

$$\log_{10}(-10) \text{ n'est pas défini (dans l'ensemble } \mathbb{R}\text{)}.$$

- ❖ Tous les nombres négatifs, ainsi que 0, 1 et présentent un «*problème potentiel*» en tant que base d'une fonction puissance. **Pour cette raison, nous n'autorisons que les nombres strictement positifs autres que 1 comme base du logarithme.** Donc, par exemple,

$$\log_{-10}(10) \text{ n'est pas défini (dans l'ensemble } \mathbb{R}\text{)}.$$

Pour écrire en toute sécurité $\log_b(a)$ il faut que :

$$\begin{aligned} b &> 0 \text{ et } b \neq 1 \\ a &> 0 \end{aligned}$$

Définition de $\log_b(a)$

Soit $a > 0$, $b > 0$ et $b \neq 1$, alors le **logarithme en base b de a** est défini par

$$\log_b(a) = p \quad \text{si et seulement si} \quad b^p = a$$

- ❖ Le nombre p , donc le logarithme, correspond à l'exposant.
- ❖ Nous dirons que :

Le logarithme est l'exposant auquel doit être élevée la base pour obtenir l'argument.

Logarithme = p

Base = b

Argument = a

Logarithme

Base

Argument

Base d'un logarithme

Dans l'expression

$$\log_b(a) = p$$

b est appelé la **base du logarithme**

Bases particulières :

1. *Ingénierie* : $b = 10$ (logarithme décimal)

Exemples : décibels, pH en chimie, échelle de Richter

2. *Informatique* : $b = 2$ (logarithme binaire)

Exemples : musique (octave = doublement de fréquence)

3. *Mathématique* : $b = e$ (logarithme népérien ou naturel)

$$\ln(x) = \log_e(x)$$

5 propriétés du logarithme

	Version logarithme	Version exponentielle
Produit	$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$	$b^x \cdot b^y = b^{x+y}$
Quotient	$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$	$\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$
Puissance	$\log_b(x^n) = n \cdot \log_b(x)$	$(b^x)^n = b^{nx}$
Changement de base	$\log_a(x) = \log_a(b) \cdot \log_b(x)$	
	$\log_b(a) = \frac{1}{\log_a(b)}$	

Changement de base

$$\log_a(x) = \log_a(b) \cdot \log_b(x)$$

Logarithme naturel

La fonction $\ln(x)$ est par définition la fonction réciproque de la fonction $\exp(x)$.

Donc on a pour tout $y > 0$

$$e^{\ln(y)} = y$$

et pour tout x réel:

$$\ln(e^x) = x$$

Pour tout $a > 0, a \neq 1$ on a

$$a^x = (e^{\ln(a)})^x = e^{x \ln(a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln(a))^n}{n!}$$

Remarque: on peut aussi définir la fonction $\ln(x)$ comme l'aire sous la courbe

$$y = \frac{1}{t}$$

entre 1 et x :

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Série géométrique

A partir de l'identité

$$(x - 1)(x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1) = x^{n+1} - 1$$

On en déduit que si $x \neq 1$

$$(x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

En faisant tendre n vers l'infini et en supposant que $|x| < 1$, alors x^{n+1} tend vers 0 et on obtient que

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}$$

Série géométrique de raison x

Exemple (paradoxe de Zénon) :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Série du logarithme naturel

Comme pour l'exponentielle, on peut calculer le logarithme naturel à l'aide d'une série, c'est-à-dire d'une somme infinie de terme.

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Mais ici, la série ne converge que pour $x \in]-1; 1]$

Comment fait une machine à calculer pour calculer $\ln(1.5)$?
Et $\ln(10)$?

Représentation graphique des fonctions logarithmiques

