

Exercices — Série 9

Les 3 premiers exercices sont une reprise des 3 derniers exercices de la série 8 avec en plus le calcul du cercle osculateur. Vous pouvez reprendre les résultats déjà obtenus sans refaire les calculs. Les nouveautés sont en gras.

Exercice 1. [Vecteur tangent et courbure]

On considère la cycloïde $c(t) = (x(t), y(t))$ avec

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$$

- (a) Calculer le vecteur tangent $c'(t)$ en tout point de la cycloïde. Que vaut-il pour $t = 2n\pi$ avec n entier ?
- (b) Calculer la courbure $\kappa(t)$. Que vaut la courbure en $t = 0$?
- (c) Pour $t = \pi$ calculer le point P de la courbe correspondant, le vecteur tangent et la courbure en P . **Puis calculer les coordonnées du centre du cercle osculateur à la courbe en P et donner son équation cartésienne implicite**

Exercice 2. [Vecteur tangent et courbure]

On considère la courbe γ donnée par son équation cartésienne explicite

$$y = \frac{1}{3}x^3$$

- (a) Calculer le vecteur tangent $c'(x)$ en tout point de cette courbe (en prenant x comme paramètre).
- (b) Calculer la courbure $\kappa(x)$. Que vaut-elle en $x = 0$?
- (c) Quand est-ce que $\kappa(x)$ est minimale ? maximale ?
- (d) Que fait la courbure lorsque x tend vers $\pm\infty$? Est-ce raisonnable ? Comparer avec $\lim_{x \rightarrow \infty} f''(x)$. Expliquer la différence.
- (e) Pour le point $P(1, \frac{1}{3})$ calculer le vecteur tangent en P , la courbure en P **ainsi que les coordonnées du centre du cercle osculateur en P .**
- (f) **Donner l'équation cartésienne du cercle osculateur à γ en P .**

Exercice 3. [Courbure d'une forme cartésienne implicite]

On considère la courbe γ donnée sous forme cartésienne implicite:

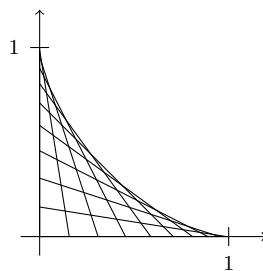
$$(\gamma) : xy^3 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}x^3 - 3y = \frac{11}{3}$$

et le point $P(2, 1)$ sur la courbe.

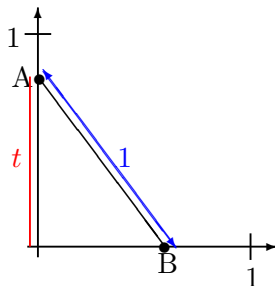
- (a) En dérivant implicitement par rapport à x déterminer la pente y' de la tangente à γ au point P . En déduire un vecteur tangent en ce point.
- (b) En dérivant une seconde fois l'équation obtenue sous (a), trouver y'' au point P . En déduire la courbure de γ en ce point.
- (c) **Trouver les coordonnées du centre du cercle osculateur à la courbe γ au point P**

Exercice 4.

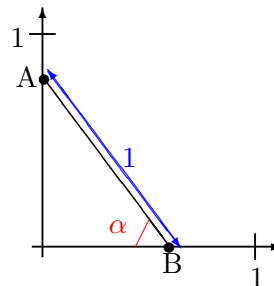
Nous voulons déterminer l'enveloppe de la famille de segments représentant "une échelle de longueur 1 qui glisse le long d'un mur":



Représentation paramétrique 1:



Représentation paramétrique 2:



paramétrisation 1 : avec t

- (a) En considérant la famille de courbes indexée par le paramètre t (comme indiqué sur la figure), les coordonnées des points A et B sont:

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> $A = (t, 0)$ et $B = (0, \sqrt{1-t^2})$ | <input type="checkbox"/> $A = (0, t)$ et $B = (\sqrt{1-t^2}, 0)$ |
| <input type="checkbox"/> $A = (0, t)$ et $B = (t, 0)$ | <input type="checkbox"/> $A = (0, t)$ et $B = (\sqrt{t^2-1}, 0)$ |

- (b) Donc, l'expression du chaque droite appartenant à cette famille de courbes est donnée par:

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> $y_t(x) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}x + t$ | <input type="checkbox"/> $y_t(x) = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}x + \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ |
| <input type="checkbox"/> $y_t(x) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}x + 2t$ | <input type="checkbox"/> $y_t(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}x + t$ |

- (c) Pour trouver la valeur du paramètre t qui donne la valeur maximale (localement) de la fonction $y_t(x)$ puis en déduire une représentation paramétrique de l'enveloppe cherchée, on calcule $\frac{\partial y_t}{\partial t}(x)$ qui vaut:

$$\begin{array}{ll} \square \frac{\partial y_t}{\partial t}(x) = -\frac{t^2 x}{2\sqrt{1-t^2}} + 1 & \square \frac{\partial y_t}{\partial t}(x) = \frac{x}{2\sqrt{1-t^2}} + 1 \\ \square \frac{\partial y_t}{\partial t}(x) = -\frac{x}{\sqrt{(1-t^2)^3}} + 1 & \square \frac{\partial y_t}{\partial t}(x) = -\frac{x}{\sqrt{(1-t^2)^3}} \end{array}$$

(d) La condition $\frac{\partial y_t}{\partial t}(x) = 0$ donne:

$$\begin{array}{ll} \square x(t) = -\sqrt{(1-t^2)^3} & \square x(t) = \sqrt{(1-t^2)^3} \\ \square x(t) = 2\frac{\sqrt{(1-t^2)}}{t^2} & \square x(t) = 2\sqrt{(1-t^2)} \end{array}$$

(e) Pour $0 \leq t \leq 1$ une représentation paramétrique de l'enveloppe cherchée est donnée par:

$$\begin{array}{ll} \square x(t) = 2\sqrt{(1-t^2)} \text{ et } y(t) = t & \square x(t) = (1-t^2)^{3/2} \text{ et } y(t) = -t^3 + t \\ \square x(t) = (1-t^2)^{3/2} \text{ et } y(t) = t^3 & \square x(t) = -(1-t^2)^{3/2} \text{ et } y(t) = 2t - t^3 \end{array}$$

paramétrisation 2 : avec α

(f) En considérant la famille de courbes indexée par le paramètre α (comme indiqué sur la figure), les coordonnées des points A et B sont:

$$\begin{array}{ll} \square A = \left(0, \frac{\sin(\alpha)}{2}\right) \text{ et } B = \left(\frac{\cos(\alpha)}{2}, 0\right) & \square A = (0, \cos(\alpha)) \text{ et } B = (\sin(\alpha), 0) \\ \square A = (0, \tan(\alpha)) \text{ et } B = (\cot(\alpha), 0) & \square A = (0, \sin(\alpha)) \text{ et } B = (\cos(\alpha), 0) \end{array}$$

(g) Donc, l'expression du chaque droite appartenant à cette famille de courbes est donnée par:

$$\begin{array}{ll} \square y_\alpha(x) = -\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}x + \sin(\alpha) & \square y_\alpha(x) = \cot(\alpha)x + \sin(\alpha) \\ \square y_\alpha(x) = -\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}x + \cos(\alpha) & \square y_\alpha(x) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}x + \sin(\alpha) \end{array}$$

(h) Pour trouver la valeur du paramètre α qui donne la valeur maximale (localement) de la fonction $y_\alpha(x)$ on calcule $\frac{\partial y_\alpha}{\partial \alpha}(x)$ qui vaut:

$$\begin{array}{ll} \square \frac{\partial y_\alpha}{\partial \alpha}(x) = -\frac{\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}x - \cos(\alpha) & \square \frac{\partial y_\alpha}{\partial \alpha}(x) = -\frac{x}{\cos^2(\alpha)} - \cos(\alpha) \\ \square \frac{\partial y_\alpha}{\partial \alpha}(x) = -\frac{x}{\cos^2(\alpha)} + \cos(\alpha) & \square \frac{\partial y_\alpha}{\partial \alpha}(x) = \frac{x}{\cos^2(\alpha)} + \sin(\alpha) \end{array}$$

(i) La condition $\frac{\partial y_\alpha}{\partial \alpha}(x) = 0$ donne:

$$\begin{array}{ll} \square x(\alpha) = \cos^3(\alpha) & \square x(\alpha) = \cos(\alpha) \\ \square x(\alpha) = -\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) & \square x(\alpha) = -\frac{\cos^3(\alpha)}{\cos(2\alpha)} \end{array}$$

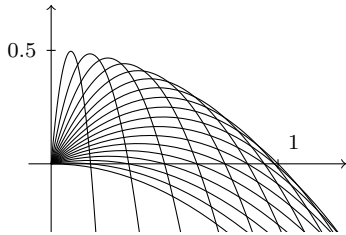
(j) Pour $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ une représentation paramétrique de l'enveloppe cherchée est donnée par:

$$\begin{array}{l} \square x(\alpha) = -\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) \text{ et } y(\alpha) = -\sin^2(\alpha)\tan(\alpha) \\ \square x(\alpha) = -\cos^3(\alpha) \text{ et } y(\alpha) = 2\cos^3(\alpha)\sin(\alpha) \\ \square x(\alpha) = \cos^3(\alpha) \text{ et } y(\alpha) = \sin^3(\alpha) \end{array}$$

$$\square x(\alpha) = \cos(\alpha) \text{ et } y(\alpha) = -\sin(\alpha) + 1$$

Exercice 5.

Nous voulons trouver l'enveloppe de la “*famille balistique*” de paraboles représentant la trajectoire d'un boulet tiré (à la vitesse de 1 [unité /seconde]) d'un canon dont la pente est p , où $p \in]0, \pi/2[$:



$$x(t) = \frac{t}{\sqrt{1+p^2}}, \quad y(t) = \frac{pt}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{t^2}{2}.$$

(a) Pour simplifier le problème nous exprimons y comme une fonction de x en éliminant le paramètre t . Dans ce cas, on obtient que la famille de courbes est donnée par:

$$\square y_p(x) = px - \frac{1}{2}x(1+p^2)$$

$$\square y_p(x) = \frac{px}{1+p^2} - \frac{1}{2}x^2(1+p^2)$$

$$\square y_p(x) = px - \frac{1}{2}x^2(1+p^2)$$

$$\square y_p(x) = px - \frac{1}{2(1+p^2)}x^2$$

(b) Pour trouver la valeur du paramètre p qui donne le y maximal (localement) on calcule $\frac{\partial y_p}{\partial p}(x)$ qui vaut:

$$\square \frac{\partial y_p}{\partial p}(x) = x + \frac{x^2}{2} \frac{p}{\sqrt{(1+p^2)^3}}$$

$$\square \frac{\partial y_p}{\partial p}(x) = x - px$$

$$\square \frac{\partial y_p}{\partial p}(x) = x + px^2$$

$$\square \frac{\partial y_p}{\partial p}(x) = x - px^2$$

(c) La condition $\frac{\partial y_p}{\partial p}(x) = 0$ selon laquelle on obtient un maximum est:

$$\square x = 0$$

$$\square x = \frac{1}{p}$$

$$\square x = -\frac{1}{p}$$

$$\square x = -\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)^3}}$$

(d) Pour $p \in]0, \pi/2[$, une représentation paramétrique de l'enveloppe cherchée est donnée par:

$$\square x(p) = \frac{1}{p} \text{ et } y(p) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2p^2}$$

$$\square x(p) = \frac{1}{p} \text{ et } y(p) = 1 - \frac{1}{2p} - \frac{p}{2}$$

$$\square x(p) = -\frac{1}{p} \text{ et } y(p) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2p^2}$$

$$\square x(p) = 0 \text{ et } y(p) = 0$$

(e) Nous pouvons exprimer l'enveloppe cherchée avec y comme une fonction de x en éliminant le paramètre p . Dans ce cas, on obtient:

$$\square y(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2$$

$$\square y(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}$$

$$\square y(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2$$

$$\square y(x) = 0$$

Exercice 6.

Une représentation paramétrique de l'ellipse de demi-axes $a, b \in \mathbb{R}^+$ est donnée par les équations :

$$x(t) = a \cos(t), \quad y(t) = b \sin(t).$$

(a) Les 1ère et 2ème dérivées $x'(t), x''(t), y'(t)$ et $y''(t)$ valent:

- $x'(t) = a \sin(t), x''(t) = a \cos(t), y'(t) = -b \cos(t), y''(t) = -b \sin(t)$
- $x'(t) = -a \sin(t), x''(t) = -a \cos(t), y'(t) = b \cos(t), y''(t) = b \sin(t)$
- $x'(t) = -a \sin(t), x''(t) = -a \cos(t), y'(t) = b \cos(t), y''(t) = -b \sin(t)$
- $x'(t) = -a \sin(t), x''(t) = a \cos(t), y'(t) = -b \cos(t), y''(t) = b \sin(t)$

(b) Donc une équation paramétrique de sa développée (qui est une *astroïde écrasée*) est donnée par les équations:

- $x(t) = \frac{(b^2-a^2)}{a} \cos^3(t)$ et $y(t) = \frac{(a^2-b^2)}{b} \sin^3(t)$
- $x(t) = \frac{(a^2-b^2)}{a} \cos^3(t)$ et $y(t) = \frac{(b^2-a^2)}{b} \sin^3(t)$
- $x(t) = a \cos(t) + \frac{\cos(t)(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))}{a}$ et $y(t) = b \sin(t) + \frac{\sin(t)(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))}{b}$
- $x(t) = a \cos(t) - \frac{b(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))}{(a^2 + b^2) \sin(t)}$ et $y(t) = b \sin(t) - \frac{a(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))}{(a^2 + b^2) \cos(t)}$

Exercice 7.

On considère la chaînette $f(x) = \cosh(x)$ et un point $A = (a, f(a))$, où $a \in \mathbb{R}$, sur celle-ci.

(a) La courbure κ de la chaînette en A est donnée par:

- $\kappa = \frac{1}{\cosh(a)}$
- $\kappa = \frac{1}{\cosh^2(a)}$
- $\kappa = \frac{(1+\sinh^2(a))^{3/2}}{|\cosh(a)|}$
- $\kappa = \frac{\cosh(a)}{(1-\sinh^2(a))^{3/2}}$

(b) Le rayon r du cercle osculateur en A est donné par:

- $r = \cosh^2(a)$
- $r = \frac{(1-\sinh^2(a))^{3/2}}{\cosh(a)}$
- $r = \frac{|\cosh(a)|}{(1+\sinh^2(a))^{3/2}}$
- $r = \cosh(a)$

(c) Le centre C du cercle osculateur en A a pour coordonnées:

- $x_0 = a - \frac{\sinh(a)(1-\sinh^2(a))}{\cosh(a)}$ et $y_0 = \cosh(a) + \frac{1-\sinh^2(a)}{\cosh(a)}$
- $x_0 = a + \sinh(a) \cosh(a)$ et $y_0 = 2 \cosh(a)$
- $x_0 = a - \sinh(a) \cosh(a)$ et $y_0 = \cosh(a) + \frac{1-\sinh^2(a)}{\cosh(a)}$
- $x_0 = a - \sinh(a) \cosh(a)$ et $y_0 = 2 \cosh(a)$

(d) L'équation de la droite γ perpendiculaire à la droite tangente en A est donnée par:

- $y(x) = \frac{1}{\sinh(a)}x - \frac{a}{\sinh(a)} - \cosh(a)$
 $y(x) = \sinh(a)x + a \sinh(a) + \cosh(a)$
 $y(x) = -\frac{1}{\sinh(a)}x + \frac{a}{\sinh(a)} + \cosh(a)$
 $y(x) = \sinh(a)x - a \sinh(a) - \cosh(a)$

(e) Le point I d'intersection de la droite perpendiculaire γ calculée en (d) avec l'axe Ox a coordonnées données par :

- $I(\sinh(a) \cosh(a) + a, 0)$
 $I(a + \coth(a), 0)$
 $I(\sinh(a) \cosh(a) + a \sinh(a), 0)$
 $I(\sinh(a) \cosh(a) - a, 0)$

(f) Est-ce que $\overline{CA} = \overline{AI}$?

- oui
 non

Exercice 8.

On considère le branche supérieure de l'hyperbole $y^2 - x^2 = 1$. Nous pouvons considérer son équation implicite, donnée par:

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

(a) Le courbure κ de la courbe en $A(a, f(a))$ est donnée par:

- $\kappa = \frac{1}{(1 + \frac{3}{2}a^2)^{3/2}}$
 $\kappa = \frac{1}{(1 + 2a^2)^{3/2}}$
 $\kappa = (1 - 2a^2)^{-3/2}$
 $\kappa = \frac{(2 + a^2)^{-3/2}}{2}$

(b) Le rayon de courbure en A est donné par:

- $r = (1 + 2a^2)^{3/2}$
 $r = 2(2 + a^2)^{3/2}$
 $r = (1 + \frac{3}{2}a^2)^{3/2}$
 $r = (1 - 2a^2)^{3/2}$

(c) Le centre C du cercle osculateur en un point $A = (a, f(a))$ a pour coordonnées:

- $x_0 = 2a + 2a^3$ et $y_0 = 2a^2\sqrt{1 + a^2}$
 $x_0 = \frac{1}{2} + a + \frac{a^2}{2}$ et $y_0 = \sqrt{1 + a^2}(6 + 4x^2)$
 $x_0 = -2a^3$ et $y_0 = 2\sqrt{1 + a^2}^3$
 $x_0 = \frac{a}{2} - \frac{a^3}{4}$ et $y_0 = \sqrt{1 + a^2}\left(\frac{5}{4} + \frac{a^2}{2}\right)$

(d) L'équation de la développée est donnée aussi par:

- $\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$
 $\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - (2x)^{\frac{2}{3}} = 1$
 $\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + (2x)^{\frac{3}{2}} = 1$
 $\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = 1$

Exercice 9. [Le même mais en paramétrique]

Nous pouvons aussi considérer l'équation paramétrique de la branche supérieure de l'hyperbole $y^2 - x^2 = 1$, par:

$$x = \sinh(t), \quad y = \cosh(t).$$

(a) Le courbure κ en $A(x(a), y(a))$ est donnée par:

$\kappa = 1 - 2 \sinh^2(a)$

$\kappa = (1 - 2 \sinh^2(a))^{-3/2}$

$\kappa = \frac{1}{(1+2 \sinh^2(a))^{3/2}}$

$\kappa = \frac{1}{1+2 \sinh^2(a)}$

(b) Le rayon r du cercle osculateur en A est donné par:

$r = \frac{1}{1-2 \sinh^2(a)}$

$r = 1 + 2 \sinh^2(a)$

$r = (1 - 2 \sinh^2(a))^{3/2}$

$r = (1 + 2 \sinh^2(a))^{3/2}$

(c) Le centre C du cercle osculateur au point A a pour coordonnées:

$x_0 = -2 \sinh^3(a), \quad y_0 = 2 \cosh^3(a)$

$x_0 = -2 \sinh^3(a), \quad y_0 = -2 \cosh^3(a)$

$x_0 = 2 \sinh(a) + 2 \sinh^3(a), \quad y_0 = 2 \cosh(a) - 2 \cosh^3(a)$

$x_0 = \sinh(a) \left(1 - \frac{1}{1-2 \sinh^2(a)}\right), \quad y_0 = \cosh(a) \left(1 - \frac{1}{2 \cosh^2(a)-1}\right)$

Exercice 10. [V/F]

Répondre par Vrai ou Faux aux assertions suivantes:

- (a) Soit γ une courbe du plan et P un point de la courbe. Si le vecteur tangent à γ en P est nul, alors la courbure n'est pas définie en P .
- (b) Soit $\gamma(t)$ une courbe du plan et $P = \gamma(t_P)$ un point de la courbe. Si la courbure est nulle en P alors $\gamma''(t_P)$ est le vecteur nul.