Exercices — Série 8

Exercice 1. [Dérivations implicites]

Pour les courbes suivantes données sous forme cartésienne implicite, calculer la pente de la tangente à la courbe sous la forme $y' = y'(x,y)$.

Vérifier que le point P donné appartient à la courbe puis déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point P.

(i) $e^{xy} + y^2 - x - 2 = 0$ $\qquad P(0,1)$

Déterminer en dérivant une seconde fois de manière implicite la valeur de y'' au point P. En déduire la nature du point P.

(ii) $e^{x-1} + 2y^2 + y^3 - 4x^2 = 0$ $\qquad P(1,1)$

(iii) $xy^3 + x^2y^2 + 3x + 4y - 4 = 0$ $\qquad P(2,-1)$

(iv) $y\ln(x) = \ln(y)$ $\qquad P(1,1)$

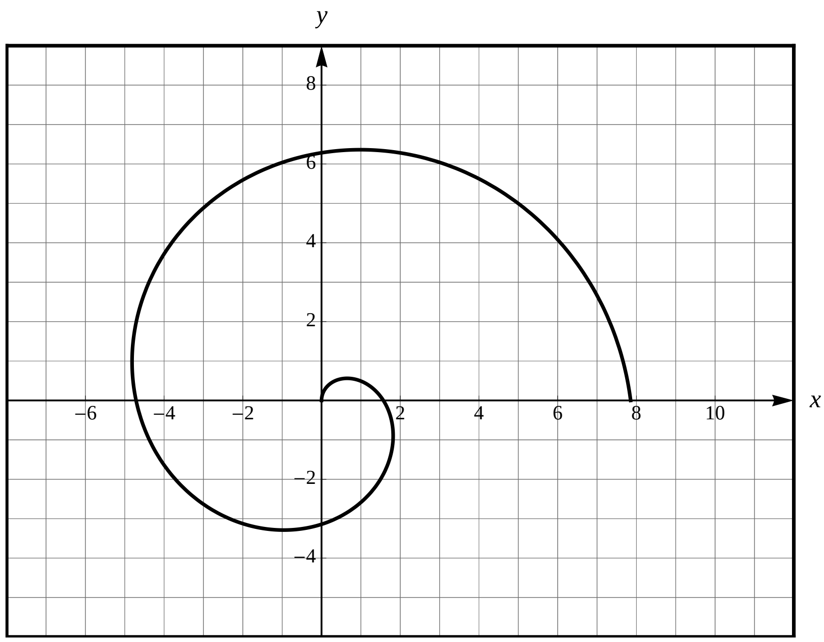
(v) $y^3 + \ln\left(\frac{x}{y} + 1\right) - 5x = 8.$ $\qquad P(0,2)$

Exercice 2. [Courbe paramétrique]

Pour la courbe paramétrique suivante, calculer la pente de la tangente à la courbe $\frac{dy}{dx}$ comme fonction du paramètre t.

$$\begin{cases} x(t) = t\sin(t) \\ y(t) = t\cos(t) \end{cases}$$

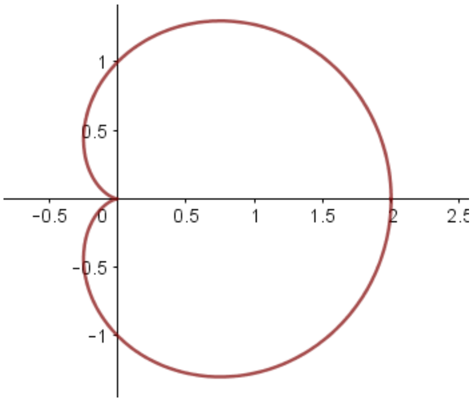
puis donner l'équation de la tangente à cette courbe au point $P(0,-\pi)$.



Exercice 3. [La cardioïde]

La cardioïde est donnée sous forme paramétrique par les équations

$$\begin{cases} x(\theta) = (1+\cos\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = (1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi].$$



(a) Calculer l'expression de la pente de la tangente à la courbe en fonction de θ : $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}$

(b) Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$déterminer le point P de la courbe et trouver la pente de la tangente à la courbe en ce point.

(c) Trouver tous les points de la courbe où la tangente est horizontale c'est-à-dire les points où $y'(\theta) = 0$ et $x'(\theta) \neq 0$

(d) Trouver tous les points de la courbe où la tangente est verticale c'est-à-dire les points où $y'(\theta) \neq 0$ et $x'(\theta) = 0$

(e) Lorsque $\theta = \pi$ que se passe-t-il pour l'expression calculée sous (a) ? Lever l'indétermination avec la règle de L'Hôpital. Y a-t-il une tangente en ce point ? Si oui comment est-elle ?

Exercice 4.

Considérons la courbe définie par l'équation implicite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. C'est une ellipse centrée à l'origine et de demi-axes égaux à a et b).

(a) La pente de la tangente en un point (x, y) par différentiation implicite de son équation vaut:

☐ $-\frac{a^2}{b^2}\frac{y}{x}$ ☐ $-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$

☐ $\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$ ☐ $\frac{b^2}{a^2}\frac{y}{x}$

(b) La pente de la tangente qui passe par $\left(-\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right)$ à l'ellipse centrée en l'origine d'axes de longueurs $a = 2$ et $b = 1$ vaut:

- ☐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ☐ $-\frac{2}{\sqrt{3}}$
- ☐ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ☐ $\frac{\sqrt{3}}{4}$

(c) Une équation paramétrique de l'ellipse centrée en l'origine d'axes de longueurs a et b est donnée par

$$x = a\cos(t) = x(t), \quad y = b\sin(t) = y(t).$$

La pente de la tangente en un point $(x(t), y(t))$ vaut:

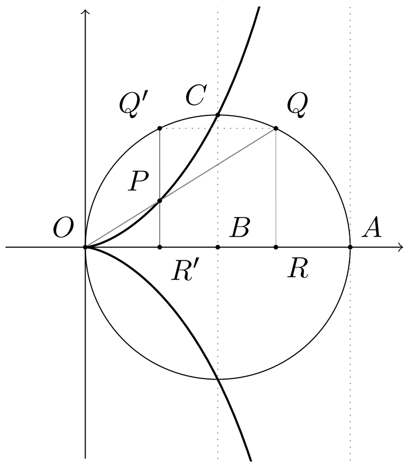
- ☐ $\frac{a}{b}\frac{\cos(t)}{\sin(t)}$
- ☐ $\frac{b}{a}\cos(t)\sin(t)$
- ☐ $-\frac{b}{a}\frac{\sin(t)}{\cos(t)}$
- ☐ $-\frac{b}{a}\frac{\cos(t)}{\sin(t)}$

(d) Est-ce que l'expression obtenue en (c) est la même qu'en (a)?

- ☐ oui
- ☐ non

Exercice 5.

Étant donné un cercle de diamètre OA et de centre B, ainsi qu'un point C du cercle sur la médiatrice de OA, la *Cissoïde de Dioclès* (environ 180 av. J.-C.) est la courbe dessinée par les points P définis comme suit: *pour un point Q du cercle, on note Q' son symétrique par rapport à BC; le point P se situe à l'intersection de la droite QO et de la perpendiculaire à OA par Q'*:



Dans ce qui suit, on supposera que $O = (0, 0)$ et $A = (1, 0)$.

(a) La distance $\overline{OQ}$ en fonction du paramètre t mesurant l'angle QOA vaut:

- ☐ $\cos(t)$
- ☐ $\tan(t)$
- ☐ $\sin(t)$
- ☐ $\frac{1}{\tan(t)}$

[*Suggestion*: considérer le triangle rectangle QOA.]

(b) Les coordonnées de Q en fonction de t valent:

- ☐ $(\tan(t)\cos(t), \cos(t)\tan(t))$
- ☐ $\left(\frac{\cos(t)}{\tan(t)}, \frac{\cos(t)}{\tan(t)}\right)$
- ☐ $(\cos^2(t), \cos(t)\sin(t))$
- ☐ $(\sin(t)\cos(t), \sin^2(t))$

(c) En utilisant que P et Q sont à la même distance de BC, calculer la première coordonnée de P, puis en utilisant que les triangles POR' et QOR sont semblables, calculer la seconde. Nous pouvons déduire qu'une paramétrisation de la Cissoïde est:

- ☐ $x = f(t) = \sin^2(t)$ $\quad y = g(t) = \frac{\cos^3(t)}{\sin(t)}$
- ☐ $x = f(t) = \cos(t)\sin(t)$ $\quad y = g(t) = \sin^4(t)$
- ☐ $x = f(t) = \cos^2(t)$ $\quad y = g(t) = \sin^2(t)$
- ☐ $x = f(t) = \sin^2(t)$ $\quad y = g(t) = \frac{\sin^3(t)}{\cos(t)}$

(d) La pente de la tangente à la Cissoïde en un point $(x(t), y(t))$ par différentiation de son équation paramétrique vaut:

- ☐ $p(t) = \frac{3\sin(t)}{2\cos^3(t)}$
- ☐ $p(t) = -\frac{2\sin^3(t)}{\cos(t)}\left(3\cos^2(t) + \sin^2(t)\right)$
- ☐ $p(t) = \frac{\sin(t)\left(3\cos^2(t)+\sin^2(t)\right)}{2\cos^3(t)}$
- ☐ $p(t) = \frac{2\cos^3(t)}{\sin(t)\left(3\cos^2(t)+\sin^2(t)\right)}$

(e) Pour trouver la pente de la tangente à la Cissoïde au point $C = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ avec l'expression paramétrique, nous utilisons t égal à:

- ☐ $\frac{\pi}{4}$
- ☐ $\frac{\pi}{3}$
- ☐ $-\frac{\pi}{4}$
- ☐ $-\frac{\pi}{3}$

(f) La pente de la tangente à la Cissoïde au point $C = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ vaut:

- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ $3\sqrt{3}$
- ☐ 3
- ☐ 2

(g) Les points (x, y) sur la Cissoïde vérifient:

- ☐ $x^3 = y^2(x-1)$
- ☐ $x(x^2+y^2) = y^2$

(cette équation est en fait une équation implicite de la courbe).

(h) La pente de la tangente à la Cissoïde en utilisant l'équation implicite ci-dessus vaut:

□ $y'(x) = \frac{3x^2+y(x)(2x+y(x))}{2y(x)}$ □ $y'(x) = \frac{3x^2}{2y(x)(x-1)}$

□ $y'(x) = \frac{3x^2-y^2(x)}{2y(x)(x-1)}$ □ $y'(x) = \frac{3x^2+y^2(x)}{2y(x)-2xy(x)}$

(i) la pente de la tangente à la Cissoïde au point $C = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ en utilisant l'équation implicite ci-dessus vaut:

□ -1 □ $\frac{1}{2}$

□ 2 □ $-\frac{3}{2}$

Exercice 6. [Courbure de la spirale logarithmique]
On considère la spirale logarithmique donnée en coordonnées paramétriques par

$$c(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}$$

(a) Esquisser la spirale pour $t \in \mathbb{R}$.

(b) Calculer le vecteur tangent $c'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et sa norme $v(t)$

(c) Calculer $c''(t) = (x''(t),\ y''(t))$

(d) Calculer la courbure pour tout t en utilisant la formule

$$\kappa = \frac{\det(c', c'')}{v^3}.$$

(e) Pour $t = 0$ calculer le point correspondant de la courbe et la courbure en ce point.

(f) Que fait la courbure lorsque $t \longrightarrow +\infty$? Et lorsque $t \longrightarrow -\infty$?

Exercice 7.
On considère la courbe plane d'équation cartésienne

$$(\gamma)\ :\ x^2 + 2xy + 2x + 2y^2 + 4y = 14$$

(a) Quel type de courbe est-ce ?

(b) En dérivant implicitement, trouver les points où la tangente à γ est horizontale

Ces trois derniers exercices seront repris avec un supplément dans la série 9. Ils sont donc importants !!

Exercice 8. [Vecteur tangent et courbure]
On considère la cycloïde $c(t) = (x(t), y(t))$ avec

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$$

(a) Calculer le vecteur tangent $c'(t)$ en tout point de la cycloïde. Que vaut-il pour $t = 2n\pi$ avec n entier ?

(b) Calculer la courbure $\kappa(t)$. Que vaut la courbure en $t = 0$?

(c) Pour $t = \pi$ calculer le point P de la courbe correspondant, le vecteur tangent et la courbure en P.

Exercice 9. [Vecteur tangent et courbure]
On considère la courbe γ donnée par son équation cartésienne explicite

$$y = \frac{1}{3}x^3$$

(a) Calculer le vecteur tangent $c'(x)$ en tout point de cette courbe (en prenant x comme paramètre).

(b) Calculer la courbure $\kappa(x)$. Que vaut-elle en $x = 0$?

(c) Quand est-ce que $\kappa(x)$ est minimale ? maximale ?

(d) Que fait la courbure lorsque x tend vers $\pm\infty$? Est-ce raisonnable ?

(e) Pour le point $P(1, \frac{1}{3})$ calculer le vecteur tangent en P et la courbure en P .

Exercice 10. [Courbure d'une forme cartésienne implicite]
On considère la courbe γ donnée sous forme cartzésienne implicite:

$$(\gamma) \,:\, xy^3 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}x^3 - 3y = \frac{11}{3}$$

et le point $P(2,1)$ sur la courbe.

(a) En dérivant implicitement par rapport à x déterminer la pente y' de la tangente à γ au point P. En déduire un vecteur tangent en ce point.

(b) En dérivant une seconde fois l'équation obtenue sous (a), trouver y'' au point P. En déduire la courbure de γ en ce point.