# Exercices — Série 7

---

**Exercice 1.** [Produit scalaire]
Soient $\vec{u} = (5, -3, \sqrt{5})$ et $\vec{v} = (1, 2, -\sqrt{5})$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Calculer :

i) $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

ii) le cosinus de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

iii) les vecteurs $\mathrm{Proj}_{\vec{v}}\vec{u}$ et $\mathrm{Proj}_{\vec{u}}\vec{v}$ .

**Exercice 2.** [Colinéarité]

i) Exprimer le vecteur
$$\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$$
comme le produit de sa norme par un vecteur unitaire.

ii) Determiner deux vecteurs de longueur 3 colinéaires au vecteur $\vec{v} = (18, 0, -24)$.

**Exercice 3.** [Coordonnées dans une base quelconque]
Soit $\vec{u} = (8, 2)$, $\vec{v} = (1, -1)$ et $\vec{w} = (1, 1)$ des vecteurs dans le plan $\mathbb{R}^2$. Trouver deux scalaires $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$.

**Exercice 4.** [Produit vectoriel]
Soient $\vec{u} = (2, 1, -3)$ et $\vec{v} = (-3, 1, 1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

(a) Calculer $\vec{u} \times \vec{v}$

(b) quel est l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ?

(c) Quel est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ?

**Exercice 5.** [Produit mixte]
Soient $\vec{u} = (3, 2, -1)$, $\vec{v} = (3, 1, 2)$ et $\vec{w} = (-2, 4, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

(a) Calculer le produit mixte $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

(b) Les vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forment-ils une base **directe** de $\mathbb{R}^3$ ?

(c) Sinon, comment obtenir une base directe de $\mathbb{R}^3$ constituée de ces 3 vecteurs ?

**Exercice 6.** [Plan, droites et sphères]

Décrire l'ensemble des points suivants avec une ou deux équations ou inéquations :

i) Le plan passant par $(3,-1,2)$ orthogonal à l'axe $Oy$.

ii) Le plan passant par $(3,-1,1)$ parallèle au plan $yOz$.

iii) Le cercle de centre $(0,2,0)$ et rayon 2, contenu dans le plan $xOy$.

iv) Le cercle de centre $(0,2,0)$ et rayon 2, contenu dans le plan $y=2$.

v) La droite passant par $(1,3,-1)$ parallèle à l'axe $Oy$.

vi) Le cercle dans l'intersection du plan passant par $(2,4,5)$ orthogonal à l'axe $Oz$, et la sphère de rayon 13 et centre $(0,0,0)$.

vii) l'extérieur de la sphère de rayon 9 et centre $(5,4,-9)$.

**Exercice 7.** [Distances dans l'espace]

Calculer le cordonnées du point de la sphére $S$, donnée par l'équation cartésienne

$$(S):\ x^2+(y+3)^2+(z+7)^2=4$$

qui est le plus proche du

i) plan $xOy$.

ii) point $Q(0,6,-7)$.

**Exercice 8.** [Produit vectoriel]

Considérons les trois points $P(-2,2,1)$, $Q(1,0,2)$, $R(0,1,-2)$ de $\mathbb{R}^3$.

i) Caluler l'aire du triangle déterminé par les points $P,Q,R$.

ii) Determiner deux vecteurs orthogonaux et unitaires au plan qui contient les points $P,Q,R$.

**Exercice 9.** [Produit mixte]

Calculer le volume du parallélélipède determiné par les vecteurs $\vec{u}=(1,2,0)$, $\vec{v}=(4,-1,4)$, $\vec{w}=(3,0,3)$.

**Exercice 10.**

i) Donner une représentation paramétrique de la droite qui passe par les points $P(9,-6,-1)$ et $Q(1,5,2)$.

ii) Donner une représentation paramétrique de la droite qui passe par le point $R(-9,6,1)$ et est orthogonale au plan d'équation $3x+5y+5z=16$.

iii) Donner l'équation du segment de droite délimité par des points $S(0,0,3)$ et $T(0,3,3)$.

**Exercice 11.** [Droite paramétrique et plan]

Determiner l'équation cartésienne du plan passant par le point $P(-6,-5,1)$ et orthogonal à la droite d'équation paramétrique $x = -6 + t$, $y = -5 - 4t$, $z = -3t$, $t \in \mathbb{R}$.

**Exercice 12.** [Intersection de 2 droites de l'espace]

Determiner, s'il existe, le point d'intersection des deux droites $L_1$ et $\mathrm{L}_2$ définies par les représentations paramétriques suivantes :

$$L_1 : \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 5t - 1 \\ z = 3t + 2 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

et

$$L_2 : \begin{cases} x = s + 2 \\ y = 4s + 4 \\ z = -3s + 5 \end{cases} \qquad s \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 13.** [Distance entre 2 plans]

Determiner la distance entre les deux plans suivants :

$$\sqrt{7}x + y + z = 7$$
$$\sqrt{7}x + y + z = 6$$

**Exercice 14.** [Droite paramétrique]

Déterminer l'équation paramétrique de la droite intersection des 2 plans suivants:

$$5x - 7y + 21z + 4 = 0$$
$$x - y + 2z + 1 = 0$$

**Exercice 15.** [Distance entre un point et un plan (forme paramétrique)]

Déterminer la distance entre le point $M(4,-3,2)$ et la droite $d$ passant par $A(1,0,-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (2,-1,3)$.

**Exercice 16.** [Distance entre un point et uun plan (forme cartésienne)]

Déterminer la distance entre le point $M(2,-1,4)$ et le plan $p$ d'équation cartésienne

$$(p)\ :\ 3x - 5y + 4z = 10$$