Exercices — Série 6

Exercice 1.

(a) Calculer la dérivée de $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

(b) Donner la valeur de $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2.

(a) Calculer la dérivée de

$$f(x) = \frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\cdot\arcsin(x)\ .$$

(b) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

(c) Faire le lien entre le point précédent et l'aire du disque de rayon 1 (commencer par expliquer comment la courbe $y = \sqrt{1-x^2}$ est liée au disque de rayon 1).

Exercice 3.

Calculer l'aire entre la courbe décrite par la fonction $f(x) = |x^2 - 3x|$, l'axe Ox, et les droites verticales $x = -2$ et $x = 2$.

Exercice 4.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction impaire pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors

- ☐ $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x > 0$
- ☐ $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$
- ☐ $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x < 0$
- ☐ $\displaystyle\int_{0}^1 f(x)\mathrm{d}x > 0$

Exercice 5.

L'aire sous le graphique de $f(x) = x^4 + 1$ entre -3 et 3 vaut

- ☐ $\frac{486}{5}$
- ☐ $\frac{506}{5}$
- ☐ $\frac{496}{5}$
- ☐ $\frac{516}{5}$

Exercice 6. [Un grand classique]

L'intégrale $\int_0^{\pi} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$ vaut:

- ☐ 0
- ☐ $\frac{\pi}{2}$
- ☐ π
- ☐ 2π

Exercice 7. Calculer les intégrales suivantes.

(a) L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{3\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ vaut

- ☐ $\frac{2}{3}\sqrt{\pi}$
- ☐ $\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-1}$
- ☐ $\frac{2}{3}$
- ☐ $\frac{1}{3}\pi$

(b) L'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ vaut

- ☐ $1-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{12}$
- ☐ $1-\frac{\pi}{4}$
- ☐ $\frac{1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{4}$
- ☐ $\sqrt{3}-1+\frac{\pi}{2}$

Exercice 8.

Calculer les intégrales (ou primitives) suivantes en utilisant la méthode substitution.

a) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\sqrt{5}} \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x$ vaut :

- ☐ 2
- ☐ 1
- ☐ 3
- ☐ 4

b) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x$ vaut :

- ☐ $\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$
- ☐ $\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)-\frac{\pi}{2}$
- ☐ $\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$
- ☐ $\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)-\frac{\pi}{2}$

c) L'intégrale $\displaystyle\int_{\sqrt{6}}^{\sqrt{7}} 3x(x^2-5)^7\,\mathrm{d}x$ vaut :

- ☐ $\frac{192}{7}$
- ☐ $\frac{257}{16}$
- ☐ $\frac{765}{16}$
- ☐ $\frac{127}{8}$

d) La primitive $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+6x+11}\,\mathrm{d}x$ vaut :

- ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)+C$
- ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}\log\left((x+3)^2+2\right)+C$
- ☐ $\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)+C$
- ☐ $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left((x+3)^2+2\right)+C$

e) L'intégrale $\displaystyle\int_0^2 x\sin(2x^2)\cos(2x^2)\,\mathrm{d}x$ vaut :

- ☐ $\frac{1}{8}\cos(8)\sin(8)$
- ☐ $\frac{1}{4}\cos^2(8)-\frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{1}{8}\sin^2(8)$
- ☐ $-\frac{1}{4}\cos(8)+2$

Exercice 9.
Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties:

a) L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ vaut :

- ☐ 1
- ☐ $2e$
- ☐ -1
- ☐ $2e-1$

b) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\,\mathrm{d}x$ vaut :

- ☐ $\pi-1$
- ☐ $\frac{\pi}{2}-1$
- ☐ 2π
- ☐ $\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}$

c) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\sin(x)\,\mathrm{d}x$ vaut :

- ☐ $4\pi-2$
- ☐ $2\pi^2$
- ☒ π^2-4
- ☐ $2\pi-1$

d) L'intégrale $\displaystyle\int_0^2 x^3\ln(2x)\,\mathrm{d}x$ vaut :

- ☐ $-\infty$
- ☐ $8\ln(4)$
- ☐ $4\ln(4)-1$
- ☐ $2\ln(4)-2$

Exercice 10. Calculer le développement limité d'ordre 7 autour de 0 de la fonction F définie par

$$F(x)=\int_0^x \ln(1+t^2)\,dt.$$

(Utiliser le théorème fondamental du calcul intégral qui affirme que $F'(x)=\ln(1+x^2)$ puis intégrer chaque terme du développement limité de $F'(x)$.)

Voici encore des exercices pour ceux qui souhaitent s'exercer plus.

Quelques formules utiles pour ces exercices

(I) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$

(II) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = \arctan[f(x)] + C$

(III) $\displaystyle\int [f(x)]^\alpha \cdot f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad \forall\alpha \neq -1$

(IV) $\displaystyle\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C$

(V) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$

Exercice 11. [Calculer les primitives suivantes]

(a) $\displaystyle\int \cos x \sin x\,dx$

(b) $\displaystyle\int (1+x^5)^3 \cdot x^4\,dx$

(c) $\displaystyle\int (1+2x^2)^2\,dx$

(d) $\displaystyle\int e^{\sin^2 x} \cdot \sin(2x)\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^3+6x}\,dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$

(i) $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(k) $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh x}\,dx$ (développer $\cosh x$ puis faire apparaître un terme de la forme $\frac{f'}{1+f^2}$)

(l) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x+\sqrt{1+x}}\,dx$ (poser $u = \sqrt{1+x}$)

(m) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx$ (compléter le carré ou poser $u = x-3$)

Exercice 12. [Intégrales définies]
Calculer les intégrales suivantes:

(a) $\displaystyle\int_1^3 \ln x \, dx$

(b) $\displaystyle\int_1^2 x \ln x \; dx$

(c) $\displaystyle\int_1^4 e^{\sqrt{x}} \, dx$ (poser $u = \sqrt{x}$)

(d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \; dx$

(e) $x\sqrt{x-1} \, dx$

(f) $\displaystyle\int x \arctan(2x) \; dx$

(g) $\displaystyle\int \ln^3 x \; dx$

(h) $\displaystyle\int \tan^3 x \cos x \; dx$

Exercice 13.

(a) $\displaystyle\int_3^8 \frac{\sqrt{1+x}}{x} \; dx$ (méthode de substitution)

(b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x(1+x)} \; dx$ (méthode de substitution)

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{(x-1)^8} \; dx$ (réflechir avant de calculer !!)

(d) $\displaystyle\int \frac{3x+4}{1+x^2} \, dx$

(e) $\displaystyle\int x^2 \cos(x) \, dx$ (double I.P.P)

(f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(1 - \cos(x)^2\right)^2 \sin(x) \, dx$ (poser $u = \sin x$ et utiliser $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$)

(g) $\displaystyle\int_{\pi^2/16}^{\pi^2/9} \cos(\sqrt{x}) \, dx$ (méthode de substitution puis I.P.P)

(h) $\displaystyle\int \sin(x) e^x dx$ (double I.P.P)

Exercice 14.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$ (I.P.P)

(d) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx$ (méthode de substitution puis I.P.P)

(e) $\displaystyle\int_0^1 \sin(\ln x)\,dx$ (méthode de substitution puis résultat (h) de l'exercice précédent)