Exercices — Série 5

Exercice 1. [Un exemple d'Euler, 1755]

Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{(\mathrm{e}^{(\mathrm{e}^{x})})}$.

Exercice 2.

Soient f, g, h trois fonctions dérivables. Alors la dérivée de $y(x) = 1 + f(x^2)g(h(x))$ vaut

□ $y'(x) = 2xf(x^2)g'(h(x))h'(x)$

□ $y'(x) = 2xf(x^2)g'(h'(x))$

□ $y'(x) = 2xf'(x^2)g(h(x)) + f(x^2)g'(h(x))h'(x)$

□ $y'(x) = 2xf'(x)g(h(x)) + f(x^2)g'(h(x))h'(x)$

Exercice 3. [VRAI / FAUX] V F

1) Si $f(x)$ et $g(x)$ sont dérivables sur $]a, b[$ et $f(x) > g(x)$ pour tout $x \in]a, b[$, alors $f'(x) > g'(x)$ sur $]a, b[$. □ □

2) Si $f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f(0) = f'(0) = 0$, donc $f(x) = 0$ pour tout x. □ □

3) Soit $f(x)$ deux fois dérivables sur $[0, 1]$. Si $f'(x) > 0$ en $[0, 1]$, donc $f''(x) > 0$ en $[0, 1]$. □ □

Exercice 4. [Euler, 1755]

Déterminer le tableau des variations de la fonction

$$y(x) = \frac{x}{1 + x^2} ,$$

puis esquisser son graphe.

Exercice 5. [Euler, 1755]

La suite de nombres

$$\sqrt[1]{1} = 1 , \quad \sqrt[2]{2} \simeq 1.4142 , \quad \sqrt[3]{3} \simeq 1.4422 , \quad \sqrt[4]{4} \simeq 1.4142 , \quad \sqrt[5]{5} \simeq 1.3797 , \quad \ldots$$

semble suggérer que la fonction $f(x) = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}}$ possède un maximum près de $x = 3$. Trouver où exactement.

Indication. Pour calculer la dérivée de $y(x) = x^{\frac{1}{x}}$, il peut être utile de se référer à la méthode utilisée pour a^x (mettre sous la forme $f(x) = e^{h(x)}$.)

Exercice 6. La dérivée de la fonction $\arctan(\sqrt{x})$ en $x \in \mathbb{R}_+$ vaut

- ☐ $\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$
- ☐ $\frac{\sqrt{x}}{1+x}$
- ☐ $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$
- ☐ $\frac{1}{1+x}$

Exercice 7. La dérivée de la fonction $y(x) = \ln\left(\dfrac{(x+2)^3(x+5)^7}{\sqrt{x-5}}\right)$, $x > 5$, vaut

- ☐ $y'(x) = \ln\left(\frac{21(x+2)^2(x+5)^6}{2(x-5)^{1/2}}\right)$
- ☐ $y'(x) = \frac{\sqrt{x-5}}{21(x+2)^2(x+5)^6}$
- ☐ $y'(x) = \frac{3}{x+2} + \frac{7}{x+5} - \frac{1}{2(x-5)}$
- ☐ $y'(x) = \frac{\sqrt{x-5}}{(x+2)^3(x+5)^7}$

Exercice 8. Donner l'équation de la tangente au graphe de la fonction $f(x) = \dfrac{2e^x}{x^2-1}$ en $x = 0$.

- ☐ $y = -2x + 4$
- ☐ $y = 2x - 4$
- ☐ $y = e^2x - 2$
- ☐ $y = -2x - 2$

Exercice 9. [Polynôme de Taylor]

(a) Calculer le polynôme de Taylor d'ordre 3, $T_3(x)$, de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 3x + 1$$

au voisinage de $x_0 = 2$.

Puis calculer la valeur de T_3 en $x = 2.1$ (avec la calculatrice !).

Comparer avec la valeur exacte $f(2.1)$.

(b) Quel est le polynôme de Taylor d'ordre 3 de $f(x)$ au voisinage de $x_0 = 0$? [Réfléchissez avant de calculer !!]

Exercice 10.
Soit $f(x)$ une fonction dont le développement limité en $x = 0$ est

$$f(x) = 10 - 4x^6 + o(x^6)$$

Alors

- ☐ f possède un maximum local en $x = 0$
- ☐ on ne peut pas savoir le type du point stationnaire en $x = 0$
- ☐ f possède un minimum local en $x = 0$
- ☐ f possède un point selle en $x = 0$

Exercice 11.
A l'aide du développement limité du sinus

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$

déterminer le développement limité d'ordre 5 de la fonction

$$f(x) = \sin(x^3) - \sin^3(x)$$

En déduire la valeur de la limite

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(x^3) - \sin^3(x)}{x^5}$$

- ☐ $+\infty$
- ☐ 3
- ☐ 1
- ☐ $\frac{1}{2}$

Exercice 12. [Polynôme de Taylor et formule du binôme]
On considère la fonction

$$f(x) = (1 + x)^\alpha$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$ non entier.

(a) Calculer les dérivées successive de f en $x = 0$: $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ et en déduire (sans démonstration) le terme $f^{(n)}(0)$ (la n-ième dérivée de f en 0).

(b) A partir du point (a) écrire la série de Taylor de la fonction f au voisinage de 0. Comparer le résultat obtenu sous (b) avec la formule du binôme.

(c) Appliquer (b) à la fonction $g(x) = \sqrt{1 - x}$ en donnant le développement limité de g d'ordre 3.

(d) En déduire le développement limité d'ordre 4 de la fonction $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$ (remplacer dans (c) x par x^2)

(e) En déduire la limite suivante

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1 - x^2}}{x^4}.$$