Exercices — Série 4

Exercice 1. [Limites]

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{\cos(\sqrt{x^3})}{x}$

☐ 0 ☐ 2 ☐ 1 ☐ $+\infty$

2. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{\sin(\sqrt{x^2+5})}{x^3+x^2+1}$

☐ $\frac{\sin(\sqrt{6})}{3}$ ☐ $\sin(\sqrt{5})$ ☐ 0 ☐ $\cos(\sqrt{5})$

3. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{5x^2-3x+2}{3x^2+7}$

☐ $2/7$ ☐ 1 ☐ ∞ ☐ $5/3$

4. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{2x}$

☐ ∞ ☐ 0 ☐ $1/2$ ☐ $1/\sqrt{2}$

5. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{x^5}{e^x}$

☐ ∞ ☐ $1/2$ ☐ $1/\sqrt{2}$ ☐ 0

Exercice 2. [Limites bis]

Calculer les limites suivantes en utilisant les règles de calcul pour les limites et les critères donnés dans le cours pour lever les indéterminations.

(1) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \sqrt{x}\sin(\dfrac{1}{x})$

(2) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x\cos(\dfrac{1}{x})\sin(\dfrac{1}{x^2})$

(3) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+3}}{5}$

(4) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2+3}-\sqrt{(2x+1)(x+4)})$

(5) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x(\sqrt{x^4+6x+3}-x^2)$

(6) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x^3+2x}-\sqrt{x^3+4})$

(7) $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (1+\dfrac{2}{n})^n$

(8) $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (1-\dfrac{1}{n})^n$

Exercice 3.
Calculer la dérivée de $\log_{10}(x)$, et plus généralement de $\log_a(x)$ (pour $a \neq 1$) en utilisant la règle de changement de base et la dérivée de la fonction $\ln(x)$.

Exercice 4.
Calculer la dérivée de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\arctan(x)} + \frac{(3+5x)}{(x+4x^2)} + \ln^2(x)\ .$$

Exercice 5. [Limites ter]
Pour les fonctions $f(x)$ et les points x_0 ci-dessous, calculer, si elle existe, la limite $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x)$. Sinon, montrer que la limite n'existe pas.

(1) $f(x) = \dfrac{5x^3+10x}{5x}$ $\quad x_0 = 0$

(2) $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$ $\quad x_0 = 2$

(3) $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $\quad x_0 = 0$

(4) $f(x) = \dfrac{\cos^2(x)-1}{x^2}$ $\quad x_0 = 0$

(5) $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}$ $\quad x_0 = 1$

(6) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ $\quad x_0 = 1$

(7) $f(x) = \dfrac{\tan(\sqrt{x}-1)}{x-1}$ $\quad x_0 = 1$

Exercice 6.
Soient f, g et h trois fonctions dérivables. Alors la dérivée de $y(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$ vaut

- ☐ $f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$
- ☐ $f'(x) \cdot g'(x) \cdot h'(x)$
- ☐ $f'(x) \cdot (g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x))$
- ☐ $f(x) \cdot (g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x))$

Exercice 7.
Soient f, g, h trois fonctions dérivables. Alors la dérivée de $f(g(h(x)))$ vaut

- ☐ $f'(g'(h'(x)))$
- ☐ $f'(g(h(x)))g'(h(x))$
- ☐ $f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x)$
- ☐ $f'(g(h(x)))h'(x)$

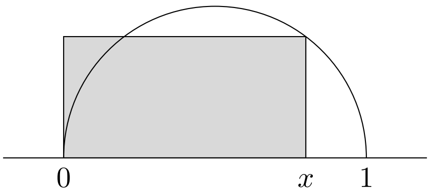
Exercice 8.
La dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$ en $x \in \mathbb{R}^+ \smallsetminus \{1\}$ vaut

☐ $-\frac{x}{\ln^2(x)}$ ☐ $-\frac{1}{x\ln^2(x)}$

☐ $-\frac{1}{\ln^2(x)}$ ☐ $-\frac{1}{x\ln(x)}$

Exercice 9. [Johann Bernoulli, ~1691]

Trouver x pour lequel le rectangle formé par l'abscisse et l'ordonnée d'un point sur le cercle $y = \sqrt{x - x^2}$ soit d'aire maximale.



S'assurer qu'il s'agit bien d'un maximum en étudiant le signe de la dérivée.

Exercice 10.

Donner l'équation de la tangente à $f(x) = \dfrac{2e^x}{x^2 - 1}$ en $x = 0$.

☐ $y(x) = -2x - 2$ ☐ $y(x) = 2x - 4$

☐ $y(x) = -2x + 4$ ☐ $y(x) = e^2x - 2$

Exercice 11.

La fonction $f(x) = \sin(x) - \cos(x)$ a la propriété suivante

☐ $f'''(x) = f'(x)$ ☐ $f(x) = f^{(5)}(x)$

☐ $f''(x) = f^{(4)}(x)$ ☐ $f'(x) = f^{(5)}(x)$

Exercice 12.

Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = 3^{(2x)}$.

Exercice 13.

La dérivée de la fonction $f(x) = x^x$ vaut

☐ $f'(x) = x^x$ ☐ $f(x) = x^{x-1}$

☐ $f'(x) = e^x \cdot \ln(x)$ ☒ $f'(x) = x^x \cdot (1 + \ln x)$