

Exercices — Série 11

Exercice 1. [Echauffement]

(a) L'équation cartésienne implicite de la surface latérale du cylindre circulaire d'axe vertical passant par le point $(x_0, y_0, 0)$, où $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, et de rayon $r > 0$ est donnée par:

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> $(x^2 - x_0^2) + (y^2 - y_0^2) + z^2 = r^2$ | <input type="checkbox"/> $(x^2 - x_0^2 + y^2 - y_0^2)^2 = r^2$ |
| <input type="checkbox"/> $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2 = r^2$ | <input type="checkbox"/> $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ |

(b) Si on veut décrire le cylindre plein (sa surface latérale **et son intérieur**) alors il faut utiliser

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> l'inéquation $(x^2 - x_0^2) + (y^2 - y_0^2) + z^2 < r^2$ | <input type="checkbox"/> l'inéquation $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$ |
| <input type="checkbox"/> l'équation $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2 = r^2$ | <input type="checkbox"/> l'inéquation $(x^2 - x_0^2 + y^2 - y_0^2)^2 \leq r^2$ |

Exercice 2. [Le tore]

(a) Une paramétrisation du cercle c de centre $(0, 0, 0)$, de rayon r et appartenant au plan Oxz est donnée par

- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> $(yr \sin(t), y, yr \cos(t))$ où $t \in [0, 2\pi]$ | <input type="checkbox"/> $(r \sin(t), r, r \cos(t))$ où $t \in [0, 2\pi]$ |
| <input type="checkbox"/> $(r \sin(t), t, r \cos(t))$ où $t \in [0, 2\pi]$ | <input type="checkbox"/> $(r \cos(t), 0, r \sin(t))$ où $t \in [0, 2\pi]$ |

(b) Une paramétrisation du cercle γ de centre $(R, 0, 0)$, de rayon r et appartenant au plan Oxz (où R est une constante strictement plus grande que r , i.e. $R > r$) est donnée par ($t \in [0, 2\pi]$)

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> $\gamma(t) = ((R + r) \sin(t), 0, (R + r) \cos(t))$ | <input type="checkbox"/> $\gamma(t) = (r \sin(t), R, r \cos(t))$ |
| <input type="checkbox"/> $\gamma(t) = (R + r \cos(t), 0, r \sin(t))$ | <input type="checkbox"/> $\gamma(t) = (Rr \sin(t), R, Rr \cos(t))$ |

(c) La surface de révolution engendrée par la rotation du cercle γ (du point (b) ci-dessus) autour de Oz est un **tore** (ou plus communément, une *chambre à air*). Une paramétrisation est donnée par

- | |
|--|
| <input type="checkbox"/> $r(t, \theta) = \left((R + r \cos(t)) \cos(\theta), (R + r \cos(t)) \sin(\theta), r \sin(t) \right)$ |
| <input type="checkbox"/> $r(t, \theta) = \left((R + r) \sin(t) \cos(\theta), (R + r) \sin(t) \sin(\theta), (R + r) \cos(t) \right)$ |
| <input type="checkbox"/> $r(t, \theta) = \left(R + r \sin(t), R \tan(\theta), R + r \cos(t) \right)$ |
| <input type="checkbox"/> $r(t, \theta) = \left(Rr \sin(t) \cos(\theta), R, Rr \cos(t) \sin(\theta) \right)$ |

où $t \in [0, 2\pi]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$.

Exercice 3. [Courbure et torsion d'une courbe de l'espace]

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la courbe de l'espace γ définie par

$$\gamma(t) = (a \cos(t), \sqrt{1+a^2} \sin(t), \cos(t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

- (a) Calculer la longueur de la courbe γ .
- (b) Calculer la courbure $\kappa(t)$ de γ .
- (c) Calculer la torsion $\tau(t)$ de γ .
- (d) Trouver l'équation cartésienne du plan contenant γ .

Exercice 4.

La **fenêtre de Viviani**¹ est une courbe de l'espace dont une paramétrisation est

$$\gamma(t) = \left(\cos^2(t) - \frac{1}{2}, \sin(t) \cos(t), \sin(t) \right) \quad \text{où } t \in \mathbb{R}..$$

- (a) Cette courbe représente une partie de la courbe définie implicitement par le système d'équations

$$\begin{array}{ll} \square \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} & \square \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \\ \square \begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{1}{4} \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} & \square \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = 1 \end{cases} \end{array}$$

- (b) La courbe de Viviani peut être décrite comme une intersection de deux surfaces:

- un hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a = b = \frac{1}{2}$ et un sphère de centre $(-\frac{1}{2}, 0, 0)$ et de rayon 1.
- un cylindre d'axe Oz et de rayon $\frac{1}{2}$ et un sphère de centre $(-\frac{1}{2}, 0, 0)$ et de rayon 1.
- un cylindre d'axe Oz et de rayon $\frac{1}{2}$ et un sphère de centre $(0, \frac{1}{2}, 0)$ et de rayon 1.
- un cylindre d'axe Oz et de rayon $\frac{1}{2}$ et un sphère de centre $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ et de rayon 1.

¹La courbe doit son nom à un problème en architecture posé par Vincenzo Viviani (mathématicien italien, 1622–1703).

Exercice 5.

- (a) Une équation paramétrique de la sphère de rayon 5 centrée en $C(1, 2, 3)$, d'équation implicite $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$, est donnée par (avec $\alpha \in [0, 2\pi]$ et $t \in [-\pi/2, \pi/2]$)

$$\begin{array}{ll} \square \begin{cases} x(t, \alpha) = \cos(t) \cos(\alpha) \\ y(t, \alpha) = 2 \cos(t) \sin(\alpha) \\ z(t, \alpha) = 3 \cos(t) \end{cases} & \square \begin{cases} x(t, \alpha) = 5 \cos(t) \cos(\alpha) \\ y(t, \alpha) = 5 \sin(t) \sin(\alpha) \\ z(t, \alpha) = 5 \cos(t) \end{cases} \\ \square \begin{cases} x(t, \alpha) = 1 + \cos(t) \cos(\alpha) \\ y(t, \alpha) = 2 + \sin(t) \sin(\alpha) \\ z(t, \alpha) = 3 + \sin(t) \end{cases} & \boxtimes \begin{cases} x(t, \alpha) = 1 + 5 \cos(t) \cos(\alpha) \\ y(t, \alpha) = 2 + 5 \cos(t) \sin(\alpha) \\ z(t, \alpha) = 3 + 5 \sin(t) \end{cases} \end{array}$$

- (b) Un ellipsoïde a équation implicite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, où a , b et c sont des constantes positives. En modifiant l'équation paramétrique de la sphère obtenue au point précédent, on peut obtenir une équation paramétrique de l'ellipsoïde, qui est donnée par ($\alpha \in [0, 2\pi]$ et $t \in [-\pi/2, \pi/2]$) :

$$\begin{array}{ll} \square \begin{cases} x(t) = a \cos(t) \cos(\alpha) \\ y(t) = b \sin(t) \sin(\alpha) \\ z(t) = c \sin(t) \end{cases} & \square \begin{cases} x(t, \alpha) = \frac{\cos(t) \cos(\alpha)}{a} \\ y(t, \alpha) = \frac{\cos(t) \sin(\alpha)}{b} \\ z(t, \alpha) = \frac{\sin(t)}{c} \end{cases} \\ \square \begin{cases} x(t, \alpha) = a \cos(t) \cos(\alpha) \\ y(t, \alpha) = b \cos(t) \sin(\alpha) \\ z(t, \alpha) = c \sin(t) \end{cases} & \square \begin{cases} x(t, \alpha) = \frac{\cos(t) \cos(\alpha)}{a} \\ y(t, \alpha) = \frac{\sin(t) \sin(\alpha)}{b} \\ z(t, \alpha) = \frac{\sin(t)}{c} \end{cases} \end{array}$$

- (c) Les constantes a , b et c dans l'ellipsoïde du point (b) représentent:

- la longueur des trois demi-axes de l'ellipsoïde, donnés ici le long de chaque axe de coordonnée.
- l'inverse de la longueur des trois demi-axes de l'ellipsoïde, donnés ici le long de chaque axe de coordonnée.
- la longueur des trois axes de l'ellipsoïde, donnés ici le long de chaque axe de coordonnée.
- l'inverse de la longueur des trois axes de l'ellipsoïde, donnés ici le long de chaque axe de coordonnée.

- (d) Dans le cas particulier où $a = b$ dans la paramétrisation du point (b). Ceci est une équation paramétrique

- d'un ellipsoïde de révolution obtenu en faisant tourner l'ellipse $\gamma(t) = (a \cos(t), c \sin(t), 0)$ autour de l'axe Oy .
- d'un ellipsoïde de révolution obtenu en faisant tourner l'ellipse $\gamma(t) = (a \cos(t), 0, c \sin(t))$ autour de l'axe Oy .
- d'un ellipsoïde de révolution obtenu en faisant tourner l'ellipse $\gamma(t) = (a \cos(t), 0, c \sin(t))$ autour de l'axe Oz .
- d'un ellipsoïde de révolution obtenu en faisant tourner l'ellipse $\gamma(t) = (a \cos(t), 0, c \sin(t))$ autour de l'axe Ox .

Exercice 6. [Identification de surfaces]

Identifier à quelle surface chacun des paramétrages suivants correspond:

(a)

$$\Sigma(u, v) = \begin{pmatrix} u + v \\ 3 - v \\ 5 - 2u + 4v \end{pmatrix} \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

(b)

$$\Sigma(u, v) = \begin{pmatrix} u^2 \\ u \cos v \\ u \sin v \end{pmatrix} \quad u \in [0, 2] \quad v \in [0, 2\pi].$$

(c)

$$\Sigma(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ u \end{pmatrix} \quad u \in [-5, 0] \quad v \in [0, 2\pi].$$

(d)

$$\Sigma(u, \alpha) = \begin{pmatrix} 3 \cos \alpha \\ u \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad u \in \mathbb{R} \quad \alpha \in [0, 2\pi].$$

Exercice 7. [Paramétrisation d'une surface]

Trouver une paramétrisation de la surface dont l'équation cartésienne est

$$8x^2 - 4y^2 - z = 0$$

Exercice 8. [Surfaces de révolution]

Trouver une paramétrisation des surfaces obtenues par rotation des courbes suivantes (situées dans le plan Oxy) autour de l'axe Oy :

(a) $y = \sqrt{x}, \quad z = 0 \quad x \in [0, 1]$

(b) $y = x^3 - x^2 + 1, \quad z = 0$

(c) Le cercle dans le plan Oxy de rayon 1 centré en $C(2, 0, 0)$ **Exercice 9.** [Plan tangent à une surface]

On considère la surface

$$\Sigma(u, v) = \begin{pmatrix} u^2 + 1 \\ v^3 + 1 \\ u + v \end{pmatrix} \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

et le point $P(5, 2, 3)$ sur la surface.

- (a) Trouver les valeurs de u et v qui donne le point P .
- (b) En considérant cette fois u comme une constante et en dérivant $\Sigma(u, v)$ par rapport à v trouver le vecteur tangent Σ_v et l'évaluer au point P .
- (c) Calculer un vecteur normal à la surface en P en faisant le produit vectoriel des 2 vecteurs tangents trouver précédemment.
- (d) Déterminer l'équation du plan tangent à la surface Σ au point P .

Exercice 10. [Plan tangent à une surface (bis)]

On considère la surface

$$\Sigma(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ v \end{pmatrix} \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

et le point $P = \Sigma\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$.

En répétant la procédure de l'exercice précédent, déterminer l'équation du plan tangent à Σ en P .

Exercice 11. [Plan tangent à une surface et dérivation implicite]

On considère la surface d'équation cartésienne

$$(\Sigma). \quad 2x^2 + 3xy + 4y^2 + 3y + z^2 + 3yz = 22$$

et le point $P(1, 1, 2)$.

- (a) Vérifier que P est sur Σ .

On va prendre x et y comme paramètres et considérer que $z = z(x, y)$ est une fonction de x et y (on pourrait résoudre l'équation en z mais ce serait laborieux !).

- (b) Dériver implicitement l'équation de Σ **par rapport à x** en considérant y **comme une constante** et $z = z(x)$ comme une fonction de x . Déterminer la dérivée de z par rapport à x au point $P(1, 1, 2)$ que l'on notera $z_x(P)$.
- (c) Dériver implicitement l'équation de Σ **par rapport à y** en considérant x **comme une constante** et $z = z(y)$ comme une fonction de y . Déterminer la dérivée de z par rapport à y au point $P(1, 1, 2)$ que l'on notera $z_y(P)$.
- (d) En déduire les 2 vecteurs tangents à Σ en P

$$\Sigma_x(P) \quad \text{et} \quad \Sigma_y(P).$$

- (e) En déduire l'équation du plan tangent à Σ au point P .
- (f) Quelle est cette surface ?

Exercice 12. [V /F]

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

- (a) Soit γ une courbe de \mathbb{R}^3 et P un point de γ . Si, au point P les vecteurs γ'_P et γ''_P sont colinéaires alors la torsion de γ en P est nulle.
- (b) Soit γ une courbe de \mathbb{R}^3 et P un point de γ . Si, au point P les vecteurs γ'_P , γ''_P et γ'''_P sont coplanaires alors la torsion de γ en P est nulle.
- (c) Une droite de \mathbb{R}^3 a une courbure nulle.
- (d) Une droite de \mathbb{R}^3 a une torsion nulle.