Enseignant : Philippe Chabloz
Mathématiques - -
14.01.2025
3h30

X10

EXTRA-10

SCIPER : **Extra-10** Salle : **-** Signature :

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- Le matériel autorisé est
  - un **formulaire personnel de 2 feuilles A4 recto-verso** (4 pages A4)
  - le formulaire et tables CRM
  - les 3 formulaires donnés pendant le semestre **non annotés**
  - une **calculatrice** non programmable et non graphique.
- L'utilisation d'une **calculatrice programmable ou/et graphique** ainsi que de tout **outil électronique** est **interdite** pendant l'épreuve.
- Première partie : dans cette partie, les questions ont **une seule bonne réponse possible**. Le barème est le suivant:

  $+3$ points si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Deuxième partie : Pour les questions **vrai/faux**, on comptera:

  $+1$ points si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren
☒ ☑ ■	☐	☐

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule bonne réponse par question.

Question 1 On considère la courbe de l'espace (dans $\mathbb{R}^3$) donnée sous forme paramétrique par

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 1+t \\ t^3 \end{pmatrix}.$$

Au point $P(1,2,1)$ correspondant à $t=1$, la torsion de la courbe vaut

- ☐ $\tau_P = \frac{3}{\sqrt{19}}$
- ☐ $\tau_P = -\frac{3}{19}$
- ☐ $\tau_P = -\frac{3}{\sqrt{8}}$
- ☐ $\tau_P = \frac{6}{19}$

Question 2 L'intégrale définie

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\, dx$$

vaut

- ☐ $\frac{1}{4} \cdot (1 + \ln 2)$
- ☐ $\frac{3}{2} - \ln 2$
- ☐ $\frac{1}{2} \cdot (1 - \ln 2)$
- ☐ $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \ln 2$

Question 3 On considère courbe plane γ d'équations paramétriques

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t - t^3 \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

et le point $P(2,3)$ sur γ. Alors la développante de γ en P a comme équations paramétriques

- ☐ $X(t) = \frac{4t^3}{1+t^2}$ et $Y(t) = \frac{t^4-3t^2}{1+t^2}$
- ☐ $X(t) = \frac{4t^3+4-4t^2}{1+t^2}$ et $Y(t) = \frac{t^4-3t^2+8t}{1+t^2}$
- ☐ $X(t) = -4t^3$ et $Y(t) = \frac{3}{2} + 3t^2 - \frac{3}{2}t^4$
- ☐ $X(t) = 6t - 4t^3$ et $Y(t) = 9t^2$

Question 4 Soit c une courbe plane dont les équations paramétriques sont

$$c(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(1+2t^2) \\ e^{\sin(\pi t)} + \arctan(\frac{1}{2}t^2) \end{pmatrix}$$

Alors au point $P(\ln(9), 1 + \arctan(2))$ correspondant à $t = 2$ la pente de la tangente vaut

- ☐ $m = \pi + \frac{1}{9}$
- ☐ $m = \frac{63}{40}$
- ☐ $m = \frac{9}{20} + \frac{9}{8}\pi$
- ☐ $m = \frac{9(e+5)}{16}$

Question 5 L'intégrale définie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(x)\sin(x)+\cos x}{1+3\sin^2(x)}\,dx$$

vaut

- ☐ $\frac{\pi}{4}+\ln(4)$
- ☐ $\frac{\pi}{3}+\ln(16)$
- ☐ $\frac{\sqrt{3}\pi}{9}+\ln\left(\sqrt[3]{4}\right)$
- ☐ $\frac{1}{3}\arctan(4)$

Question 6 Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier strictement supérieur à 3 et $x \in \mathbb{R}$ non nul. Quel est le coefficent du terme x^{n-3} dans le développement de $(3+2x)^n$?

- ☐ $\begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 27 \cdot 2^{n-3}$
- ☐ $\begin{pmatrix} n+3 \\ n \end{pmatrix} \cdot 9 \cdot 2^{n-2}$
- ☐ $\begin{pmatrix} n \\ n-3 \end{pmatrix} \cdot 27$
- ☐ $\begin{pmatrix} n \\ n-3 \end{pmatrix} \cdot 8 \cdot 3^{n-3}$

Question 7 On considère la courbe plane γ d'équation cartésienne implicite

$$(\gamma):\ x^3y+xy^3-32x-8y+48=0$$

et le point $P(2,2)$ sur γ. En considérant $y=y(x)$ comme fonction de x autour du point P on peut calculer sa dérivée seconde qui vaut

- ☐ $y''_P = 2$
- ☐ $y''_P = -1$
- ☐ $y''_P = \frac{1}{4}$
- ☐ $y''_P = -\frac{1}{8}$

Question 8 Un observateur sur le sol observe le sommet d'une tour. L'observateur est à la même hauteur que le pied de la tour. Il voit le sommet de la tour sous un angle de 30 degrés. Puis il avance de 10 mètres en direction de la tour et voit alors le sommet de la tour sous un angle de 45 degrés. La hauteur de la tour vaut

- ☐ $h = 17.5$ mètres
- ☐ $h = 10 \cdot \left(\sqrt{3}-1\right) \approx 7.32$ mètres
- ☐ $h = 5 \cdot \left(\sqrt{3}+1\right) \approx 13.66$ mètres
- ☐ $h = 25$ mètres

Question 9 Soient a, b et c trois nombres réels > 0. Alors l'expression

$$\frac{1}{2}\ln(a) - 3\ln(b) + \log_{10}(c)$$

vaut

- ☐ $\ln\left(\frac{\sqrt{a}\cdot c^{\log_{10}(e)}}{b^3}\right)$
- ☐ $\ln\left(\frac{a\cdot c^{\log_{10}(e)}}{b^3}\right)$
- ☐ $\ln\left(a^2\cdot b^3\cdot c\right)$
- ☐ $\ln\left(\frac{a^2\cdot c}{b^3}\right)$

Question 10 Parmi les fonctions réelles suivantes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ laquelle est une fonction polynomiale ?

- ☐ $f(x) = \sqrt{3+x^2}$
- ☐ $f(x) = \frac{1}{2+x^2}$
- ☐ $f(x) = \ln(2)\cdot x^3 + e\cdot x^2 + \sqrt{3}x + 4$
- ☐ $f(x) = \sin(x)$

Question 11 La limite

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\sin^2(x)\right)^{\frac{2}{x+3x^2}}$$

vaut

- ☐ $e^{\frac{3}{2}}$
- ☐ e^3
- ☐ e^2
- ☐ 1

Question 12 On considère la parabole semi-cubique $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ d'équations paramétriques

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

Alors la développée de γ a comme équations paramétriques

- ☐ $x_C(t) = \frac{7}{3}t^2 + 3t^4$ et $y_C(t) = t^3 + -2t^2 - 3t^4$
- ☐ $x_C(t) = t + \frac{2}{3}t + 3t^2$ et $y_C(t) = t^2 - 3t^3$
- ☐ $x_C(t) = -t^2 - \frac{9}{2}t^4$ et $y_C(t) = 4t^3 + \frac{4}{3}t$
- ☐ $x_C(t) = -2t^2 - \frac{9}{4}t^4$ et $y_C(t) = 4t^3 + \frac{16}{3}t$

Question 13 On considère la courbe $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ donnée sous forme paramétrique par

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \\ 2t^2+1 \end{pmatrix} \qquad t \in [0, \sqrt{2}]$$

Lorsque γ tourne autour de l'axe Oz, elle forme une surface de révolution. L'aire de cette surface de révolution vaut

- [ ] $A = \frac{408}{3}\pi$
- [ ] $A = \frac{52}{3}\pi$
- [ ] $A = \frac{2\sqrt{8}}{3}\pi$
- [ ] $A = 16\pi$

Question 14 L'approximation de Taylor d'ordre 6 de la fonction $f(x) = \sin(\ln(1-x^2))$ vaut

- [ ] $f(x) = -x^2 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6 + o(x^6)$
- [ ] $f(x) = -x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^6)$
- [ ] $f(x) = -x^2 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^6 + o(x^6)$
- [ ] $f(x) = -x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^6 + o(x^6)$

[Indication: ne pas calculer les dérivées mais utiliser les séries de Taylor connues !!]

Question 15 On considère le plan $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ passant par $M(3,5,2)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} = (1,2,1)$ et $\vec{v} = (1,1,2)$. La distance du point $P(5,1,1)$ au plan Π vaut

- [ ] $\delta(P,\Pi) = \frac{3\sqrt{14}}{14}$
- [ ] $\delta(P,\Pi) = \frac{3\sqrt{11}}{11}$
- [ ] $\delta(P,\Pi) = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{14}}$
- [ ] $\delta(P,\Pi) = \sqrt{11}$

Question 16 On considère la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équations paramétriques

$$\Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} \ln(u+2v^2) \\ \arctan(uv) \\ u^2+2uv \end{pmatrix} \qquad u > 0 \quad v \in \mathbb{R}$$

Au point P correspondant à $u = 2$ et $v = 1$, un vecteur normal à la surface est

- [ ] $\vec{n}_P = \begin{pmatrix} -8 & 5 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$
- [ ] $\vec{n}_P = \begin{pmatrix} 8 & 25 & 1 \end{pmatrix}$
- [ ] $\vec{n}_P = \begin{pmatrix} 8 & -25 & -2 \end{pmatrix}$
- [ ] $\vec{n}_P = \begin{pmatrix} 16 & -50 & 1 \end{pmatrix}$

Question 17 On considère la branche d'hyperbole d'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1 \qquad x > 0$$

située dans le plan Oxy La surface de révolution obtenue lorsque cette hyperbole tourne autour de l'axe Ox a comme équations paramétriques

- ☐ $\Sigma(t,\alpha) = \begin{pmatrix} 4\cosh(t) \\ \sinh(t)\cos(\alpha) \\ \sinh(t)\sin(\alpha) \end{pmatrix} \qquad t \in R,\ \alpha \in [0, 2\pi]$
- ☐ $\Sigma(t,\alpha) = \begin{pmatrix} \sinh(t)\cos(\alpha) \\ \sinh(t)\sin(\alpha) \\ 2\cosh(t) \end{pmatrix} \qquad t \in R,\ \alpha \in [0, 2\pi]$
- ☐ $\Sigma(t,\alpha) = \begin{pmatrix} 2\cosh(t) \\ \sinh(t)\cos(\alpha) \\ \sinh(t)\sin(\alpha) \end{pmatrix} \qquad t \in R,\ \alpha \in [0, 2\pi]$
- ☐ $\Sigma(t,\alpha) = \begin{pmatrix} \sinh(t)\cos(\alpha) \\ 2\cosh(t) \\ \sinh(t)\sin(\alpha) \end{pmatrix} \qquad t \in R,\ \alpha \in [0, 2\pi]$

Question 18 L'aire géométrique comprise entre les courbes $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$, $y = \frac{1}{1+x}$ et les droites $x = 0$ et $x = 2$ vaut

- ☐ $\ln(3) - \frac{\sqrt{8}}{3}$
- ☐ $\frac{3}{2} - \ln 3$
- ☐ $\ln\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{2}{3} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)$
- ☐ $\frac{1}{4} \cdot (1 + \ln 2)$

Suggestion : faire un dessin de la situation

Question 19 L'enveloppe de la famille d'ellipses

$$x^2 + \lambda^2 y^2 - \lambda = 0$$

est

- ☐ les 4 branches d'hyperbole d'équations $2xy = \pm 1$
- ☐ la courbe d'équation $4x^2y^2 - 2xy - 1 = 0$
- ☐ l'ellipse d'équation $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$
- ☐ la parabole d'équation $y = 2x^2 + 4$

Question 20 On considère la surface de $\mathbb{R}^3$ donnée par l'équation cartésienne implicite

$$x^3yz + e^{xy+z^2} + 3x - ey + (1-2e)z + e - 4 = 0$$

et le point $P(1, 0, 1)$ sur cette surface. Alors l'équation du plan tangent à la surface en P est

- ☐ $x - y + 3z = 4$
- ☐ $3x + ey - z = 2$
- ☐ $3x + y + z = 4$
- ☐ $ex - e^2y + 2z = 2 + e$

Question 21 Les équations paramétriques suivantes

$$\begin{cases} x = t\cos u \\ y = t\sin u \\ z = 3u \end{cases} \qquad t, u \in \mathbb{R}$$

représentent

- ☐ une surface hélicoïdale (ou hélicoïde)
- ☐ un hyperboloïde
- ☐ un ellipsoïde
- ☐ la surface latérale d'un cône

Question 22 Soit f une fonction réelle dont le développement limité en $x_0 = 2$ est

$$f(x) = 5 - 4(x-2) + 3(x-2)^5 + o[(x-2)^5]$$

Alors

- ☐ f admet un maximum local en $x_0 = 2$
- ☐ le point $x_0 = 2$ est un plat
- ☐ le point $x_0 = 2$ est un point d'inflexion mais pas un point stationnaire
- ☐ f admet un minimum local en $x_0 = 2$

Question 23 Soit la courbe γ du plan d'équation cartésienne implicite

$$\left(x^2 + y^2\right)^3 - 25x^2y^2 - 25 = 0$$

et le point $P(2,1)$ sur γ. Alors l'équation de la tangente à γ en P est

- ☐ $y = \frac{8}{3}x - \frac{13}{3}$
- ☐ $y = 4x - 7$
- ☐ $y = -x + 2$
- ☐ $y = 2x - 3$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 24 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle 2 fois dérivable. Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$ alors f possède un maximum local en $x = a$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 25 Si une fonction f est bijective et concave alors sa réciproque (ou inverse) f^{-1} est convexe.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 26 L'équation cartésienne $x^2 - 2z^2 = 1$ définit une hyperbole dans $\mathbb{R}^3$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 27 Soit γ une courbe de l'espace $\mathbb{R}^3$ dont la torsion est nulle en tout point. Alors γ est située dans un plan.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 28 Soit γ une courbe plane qui admet un point d'inflexion en $P \in \gamma$. Alors la courbure de cette courbe en P vaut 0.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 29 Soit $c(t)$ une courbe plane paramétrée par t. Si en un point P de la courbe le vecteur tangent est non nul et colinéaire au vecteur accélération alors la courbure est nulle en ce point.

☐ VRAI ☐ FAUX