# Exercices Structures Fondamentales
# Semaine 9

EPFL, Semestre d'automne 2025

**Exercice 1.**
Soit $G$ un groupe. Montrez que $\forall g \in G$, $o(g) = |\langle g \rangle|$.

**Exercice* 2.**
On écrit $Z(G)$ pour le centre d'un groupe $G$.

1. Soit $f\colon G \twoheadrightarrow H$ un homomorphisme de groupes surjectif. Montrez que
$$f(Z(G)) \subseteq Z(H).$$
2. Donnez un exemple d'un homomorphisme surjectif $f\colon G \to H$ tel que
$$f(Z(G)) \subsetneq Z(H).$$
3. Donnez un exemple d'un homomorphisme $f\colon G \to H$ tel que
$$f(Z(G)) \nsubseteq Z(H).$$
4. Soit $f\colon G \to H$ injectif et $f(G) \subset Z(H)$. Montrez que $G$ est abélien.
5. Soient $G, H$ deux groupes. Montrez que $Z(G \times H) \cong Z(G) \times Z(H)$.

**Exercice 3.**
Montrez que les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont tous de la forme $n\mathbb{Z}$, avec $n \in \mathbb{Z}$.

**Exercice 4.**
Trouver six sous-groupes de $S_4$ non-isomorphes.

**Exercice 5.**
Soit $n \geq 2$ un entier.

1. Montrez que les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont donnés par les sous-ensembles
$$d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} := \{[rd] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid r \in \mathbb{Z}\}$$
où $0 < d \leq n$ divise $n$.

2. Si $n = dm$, montrez que $d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

3. Montrez que $[k] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ engendre (génère) le groupe entier $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si $pgcd(k, n) = 1$.

4. Déduisez que pour tout $n \geq 2$,

$$n = \sum_{d|n} \phi(d).$$

   *Indication : remarquez que chaque élément de* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *engendre un sous-groupe ; et que le nombre d'éléments engendrant ce sous-groupe peut être calculé grâce à la fonction phi d'Euler.*