Exercices Structures Fondamentales
Semaine 8

EPFL, Semestre d'automne 2025

Exercice 1. 1. Montrez que tous les groupes d'ordre 2 sont isomorphes entre eux.

2. Montrez que tous les groupes d'ordre 3 sont isomorphes entre eux.

3. Montrez que $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice* 2.
Soit $n \geq 2$ un nombre entier.

1. Montrez que $\mathrm{End}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, est égal à
$$\{m_d\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid 0 \leq d < n\}$$
où m_d désigne l'application de la multiplication par d.

2. En déduire que l'application $\theta : \mathrm{End}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ définie par
$$\theta(f) = f([1])$$
pour tout $f \in \mathrm{End}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est une bijection.

3. Montrez que θ induit un isomorphisme de groupes $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

Exercice 3. 1. Soit G un groupe. Construisez une bijection explicite entre $\{\text{homomorphismes } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to G\}$ et $\{g \in G \mid g^2 = e_G\}$.

2. Montrez que $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 4.
Soit G un groupe. Pour $s \in G$, définissons $L_s : G \to G$ par $L_s(t) = st$ pour tout $t \in G$ (L_s est donc la multiplication à gauche, aussi appelée **translation à gauche** par s).

1. Soit $\mathrm{Bij}(G)$ l'ensemble de toutes les bijections de G sur lui-même, c'est-à-dire, toutes les permutations de G. Montrez que pour tout $s \in G$, $L_s \in \mathrm{Bij}(G)$.

2. Montrez que l'application

$$\Lambda : G \to \mathrm{Bij}(G), \quad s \mapsto L_s$$

est un homomorphisme de groupes.

3. Montrez que Λ est injective.