Exercices structures algébriques
Semaine 7

EPFL, Semestre d'automne 2025

Exercice 1.
Terminer la preuve du lemme 4.4 dans le cours. Soit $\phi\colon G \to H$ un homomorphisme de groupes. Alors $\forall g \in G$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$ on a $\phi(g^n) = \phi(g)^n$.

Exercice 2.
Soit G un groupe. Pour un élément $g \in G$ d'ordre fini on note $o(g) \in \mathbb{N}$ l'ordre de g.

1. Soit $g \in G$ and $m \in \mathbb{N}$. Montrer que $g^m = e_G$ implique que $o(g)|m$.

2. Soit $g \in G$ un élément d'ordre fini ($o(g) = n < \infty$). Montrer que

$$o\left(g^r\right) = \frac{n}{\mathrm{pgcd}(n, r)} \qquad \text{pour } 0 < r < n.$$

3. Soient $g_1, \ldots, g_m \in G$ des éléments d'ordres finis commutant deux-à-deux (c'est-à-dire $g_i g_j = g_j g_i$ pour tous i, j). Montrer que

$$o\left(\prod_{i=1}^{m} g_i\right) \leq \mathrm{ppcm}\{o(g_1), \ldots, o(g_m)\},$$

où $\mathrm{ppcm}\{a_1, \ldots, a_s\}$ désigne le plus petit commun multiple des entiers naturels $a_1, \ldots, a_s$.

Exercice* 3.
Fixons un entier $n \geq 1$. Prouvez les assertions suivantes :

1. Un cycle dans S_n (de longueur ≥ 2) n'est jamais égal à e_{S_n}.

2. Soient σ et σ' des cycles disjoints. Alors $\sigma\sigma' = \sigma'\sigma$.

3. Tout élément de S_n différent de l'identité peut s'écrire comme produit de cycles disjoints, et ces cycles sont uniquement déterminés.

4. Soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_m \in S_n$ des cycles deux-à-deux disjoints. Montrez que
$$o\left(\prod_{i=1}^{m} \sigma_i\right) = \mathrm{ppcm}\{o(\sigma_1), \ldots, o(\sigma_m)\}.$$

5. Si $\sigma \in S_n$, alors $\sigma^{n!} = e_{S_n}$.

Exercice 4.
Donnez la liste de tous les homomorphismes de groupes entre $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (dans un sens ou dans l'autre).

Exercice 5.
Soit $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction phi de Euler.

1. Supposons $\mathrm{pgcd}(n, m) = 1$. Montrer $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$.
Indication : Trouver un isomorphisme $(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

2. Soit p un nombre premier. Montrer $\phi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$.

3. Soit $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_l^{k_l}$ ou p_i sont des nombres premiers distincts. Montrer $\varphi(n) = p_1^{k_1-1}(p_1-1)p_2^{k_2-1}(p_2-1)\cdots p_l^{k_l-1}(p_l-1)$.