

Exercices Structures Fondamentales

Semaine 6

EPFL, Semestre d'automne 2025

Exercice 1.

Soit G un groupe. Montrer que $e_G^{-1} = e_G$.

Exercice* 2. 1. Soit G un groupe tel que $\forall g \in G, g^2 = e_G$. Montrer que G est abélien.

2. Soit G un groupe non trivial d'ordre pair. Montrer qu'il existe un $g \in G$ tel que $g \neq e_G$ mais $g^2 = e_G$.

Exercice 3.

Soit G un groupe. Montrer que $\forall g \in G$ et $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ on a $g^{m+n} = g^m g^n$.

Exercice 4.

Fixons un entier $n \geq 1$. Un **cycle** de S_n est une permutation définie de la manière suivante. Prenons des entiers distincts $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$ avec $r \geq 2$; le cycle $\sigma := (i_1 \dots i_r)$ est la permutation définie par

$$\sigma(i_j) = i_{j+1} \text{ pour } j < r, \quad \sigma(i_r) = i_1, \quad \sigma(m) = m \text{ pour } m \notin \{i_1, \dots, i_r\}.$$

On appelle r la **longueur** du cycle σ , et l'ensemble $\{i_1, \dots, i_r\}$ le **support** de σ . Deux cycles $(i_1 \dots i_r)$ et $(j_1 \dots j_s)$ sont (**à supports**) **disjoints** si

$$\{i_1, \dots, i_r\} \cap \{j_1, \dots, j_s\} = \emptyset.$$

On travaille dans le groupe S_5 .

1. Ecrire les permutations suivantes sous la forme vue en cours:

- (1 3 4)

- (1 2 3)(3 1 4)

- (5 3 1)(1 2)(2 3 1 4)

2. Ecrire les permutations suivantes sous la forme de produits de cycles disjoints :

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
- $(1\ 2\ 3)(2\ 3\ 1)(3\ 1\ 2)$
- $(5\ 3\ 2)(1\ 2)(2\ 3\ 1\ 4)$
- $(2\ 3\ 1)(1\ 2\ 3)(2\ 3\ 1\ 4)$

Exercice 5.

Considérer l'ensemble $G = \{0, 1, 2\}$ avec l'opération $\star : G \times G \rightarrow G$, $g \star h = |g-h|$. Vérifiez quelles conditions de la définition des groupes sont satisfaites.