Exercices structures algébriques
Semaine 5

EPFL, Semestre d'automne 2025

Exercice 1.
Trouver $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $13 \cdot m + 2025 \cdot n = 1$.

Exercice* 2.
On dit qu'un sous-ensemble $E \subseteq \mathbb{N}$ est **non-borné** si pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe un élément $n \in E$ tel que $m < n$. Montrer qu'un sous-ensemble $E \subseteq \mathbb{N}$ est non-borné si et seulement si $|E| = |\mathbb{N}|$.

Exercice 3 (Applications de Cantor-Schröder-Bernstein)**.**
On rappelle qu'un ensemble est infini dénombrable s'il a le même cardinal que $\mathbb{N}$.

1. Montrez que $\mathbb{Z}$ est infini dénombrable.

2. Soit E un ensemble et $A_i \subseteq E$, $i \in \mathbb{N}$ des sous-ensembles finis. Montrez que $|\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i| \leq |\mathbb{N}|$.
   Indication: Donnez une fonction surjective $\mathbb{N} \to \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ qui dénombre d'abord A_0, puis A_1, puis A_2 etc.

3. Montrez que $\mathbb{N}^n$ est infini dénombrable, pour tout $n \geq 1$.
   Indication: Considérez les ensembles
   $$A_i = \{(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n \mid m_j \leq i \text{ pour } j = 1, \ldots, n\}$$
   pour tout $i \in \mathbb{N}$ et montrez que $\mathbb{N}^n = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Utilisez la partie 2 pour conclure.

4. Montrez que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
   Indication: Puisque tout nombre rationnel peut être écrit comme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction surjective $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$. Utilisez les parties 1 et 3 pour construire une fonction surjective $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$.

5. Soient A_i, $i \in \mathbb{N}$ des sous-ensembles infini dénombrables. Montrez que l'union $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ est infini dénombrable.
   Indication: Construisez une fonction surjective $\mathbb{N}^2 \to \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ telle qu'une paire $(i, n) \in \mathbb{N}^2$ est envoyée sur le n-ième élément de l'ensemble (dénombrable) A_i.

Exercice 4.
Soit E un ensemble. Montrez que $|2^E| > |E|$.
Indication : Par l'absurde, supposons qu'une bijection $\phi : E \to 2^E$ *existe. Considérez l'ensemble* $\{x \in E \mid x \notin \phi(x)\}$.

Exercice 5.
Un sorcier maléfique menace un village où vivent un nombre infini de gnomes. Il promet de lancer un sort qui fera apparaître un chapeau sur la tête de chaque gnome. Chaque chapeau sera rouge ou bleu, mais les gnomes ne pourront pas voir le chapeau sur leur propre tête. Chaque gnome devra deviner la couleur du chapeau sur sa tête. Le sorcier ne laissera les gnomes tranquilles que si un nombre fini de gnomes se trompe. Les gnomes peuvent élaborer une stratégie avant que le sorcier ne mette les chapeaux sur leur tête, mais ils ne peuvent pas parler ou communiquer entre eux une fois les chapeaux sur la tête. Les gnomes ont une très bonne vue et peuvent voir le chapeau de tous les autres gnomes. Le sorcier peut écouter les gnomes élaborer des stratégies et choisir l'emplacement des chapeaux le plus maléfique possible. Que doivent faire les gnomes?
Indication: On rappelle l'axiome du choix : si A_i $(i \in I)$ *sont des ensembles non-vides alors on peut choisir un élément* $a_i \in A_i$ *pour tout* $i \in I$.