

# Exercices structures algébriques

## Semaine 4

EPFL, Semestre d'automne 2025

### Exercice 1.

Dans les cas suivants, est-ce que  $\mathcal{R} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  est une relation d'équivalence sur  $\mathbb{R}$  ?

1.  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y\}$ ,
2.  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - y| < 1\}$ ,
3.  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 y = 1\}$ ,
4.  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = x - y\}$ .

### Exercice 2.

Soit  $R$  la relation d'équivalence sur  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  dont la partition associée est  $\{1, 2\}$ ,  $\{3\}$  et  $\{4, 5\}$ . Pour chaque relation d'équivalence  $S \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$  telle que  $R \subseteq S$ , déterminer:

1.  $S$  comme un sous-ensemble de  $\{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$
2. La partition associée à  $S$
3. Le nombre des éléments de  $\{1, 2, 3, 4, 5\}/S$

### Exercice\* 3.

Soit  $E$  un ensemble. On définit la relation suivante sur  $2^E$ :

$$\mathcal{R} = \{(A, B) \in 2^E \times 2^E \mid A = B \text{ ou } A = E \setminus B\}.$$

1. Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.
2. On suppose que  $E$  est un ensemble fini. Quel est le cardinal de  $2^E/\mathcal{R}$  ?

**Exercice 4.**

Soit  $\mathcal{R}$  la relation d'équivalence sur  $\mathbb{N}$  définie comme suit:

$$(m_1, n_1) \equiv (m_2, n_2)$$

si  $m_1 + n_2 = n_1 + m_2$ .

- Montrer que  $\equiv$  est une relation d'équivalence sur  $\mathbb{N}$ .
- Montrer que le quotient de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  par  $\mathcal{R}$  est en bijection avec  $\mathbb{Z}$ .

**Exercice\* 5.**

Soit  $A, B$  deux ensembles. Montrer qu'il existe une surjection  $A \twoheadrightarrow B$  si et seulement si il existe une injection  $B \hookrightarrow A$  entre les deux.

*Indication: On rappelle l'axiome du choix: Si des  $A_i$  ( $i \in I$ ) sont des ensembles non vides alors on peut choisir un élément  $a_i \in A_i$  pour tout  $i \in I$ .*