Exercices structures fondamentales
Semaine 14

EPFL, Semestre d'automne 2025

Exercice 1.
Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On rappelle que pour un sous-groupe $H < \mathbb{Z}$ il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $H = n\mathbb{Z}$.

1. Montrez $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \mathrm{pgcd}(a, b)\mathbb{Z}$ et $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \mathrm{ppcm}(a, b)\mathbb{Z}$.
2. Montrez qu'il existe un isomorphisme
$$(\mathrm{pgcd}(a, b)\mathbb{Z})/b\mathbb{Z} \cong a\mathbb{Z}/(\mathrm{ppcm}(a, b)\mathbb{Z}).$$
3. Déduisez que $\mathrm{pgcd}(a, b) \cdot \mathrm{ppcm}(a, b) = a \cdot b$.

Exercice 2.
Montrez que le groupe multiplicatif $\mathbb{Q}_{>0}$ n'est pas de type fini.

Exercice 3.
Soit $n \geq 3$.

1. Montrez que S_n est engendré par les transpositions
$$(1\ 2), (2\ 3), \ldots, (n-1\ n).$$
Indication : il suffit de montrer que le sous-groupe engendré par ces transpostions contient toutes les transpositions de S_n.
2. Montrez que S_n est engendré par $(1\ 2)$ et $(2\ 3\ \ldots\ n)$.
3. Soit $H \leq S_n$ un sous-groupe engendré par 2 transpositions distinctes. Montrez que soit $H \cong S_3$, soit $H \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 4.
Soit $n \geq 3$. Montrez que A_n est engendré par des 3-cycles.

Exercice 5 (Troisième théorème d'isomorphisme)**.**
Soit $M \lhd G, N \lhd G$ et $M < N$.

1. Montrez que $M \lhd N$ et $N/M \lhd G/M$.
2. Montrez que
$$(G/M)/(N/M) \cong G/N$$