Exercices structures fondamentales
Semaine 13

EPFL, Semestre d'automne 2025

Exercice 1.
Soit G un groupe et $H_1, H_2 \leq G$ deux sous-groupes. On suppose que $\langle H_1 \cup H_2 \rangle = G$ et que $H_1 \cap H_2 = \{e_G\}$.

1. Supposons que H_1 soit normal. Montrez qu'alors la composition de l'inclusion puis de l'application quotient,

$$H_2 \to G \xrightarrow{\xi_{H_1}} G/H_1$$

est un isomorphisme de groupes.

2. Supposons maintenant que H_1 et H_2 soient normaux. Montrez qu'alors le produit des applications quotient,

$$G \xrightarrow{(\xi_{H_2}, \xi_{H_1})} G/H_2 \times G/H_1$$

est un isomorphisme de groupes. Ainsi, avec le premier point, déduisez que $G \cong H_1 \times H_2$.

Exercice 2.

1. Soit G un groupe d'ordre 4. Si G n'est pas cyclique, montrez que $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

   Ainsi les groupes d'ordre 4 sont forcément abéliens, isomorphes à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2. Dans la suite de cet exercice, on classifie les groupes *abéliens* d'ordre 8. Notez que si G est cyclique, alors $G \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Supposons alors que G est abélien, $|G| = 8$ et que G n'est pas cyclique.

   (a) Si tous les éléments de G sont de 2-torsion, montrez que $G \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.

   (b) Supposons qu'il existe $g, h \in G$ tels que $o(g) = 4, o(h) = 2$ et $h \notin \langle g \rangle$. Montrez alors que $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

(c) Montrez que si G possède un élément g d'ordre 4, alors il existe toujours un $h \in G$ tel que $o(h) = 2$ et $h \notin \langle g \rangle$.
Indication : procédez par l'absurde.

Ainsi les groupes abéliens d'ordre 8 sont isomorphes à $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Exercice 3.
Rappelez-vous la définition pour $n \geq 3$:

$$D_{2n} = \{\sigma \in S_n \,|\, \forall 1 \leq i, j \leq n \ : \ [i], [j] \text{ adjacent dans } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \Rightarrow [\sigma(i)], [\sigma(j)] \text{ adjacent dans } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$$

1. Montrer que $D_{2n} < S_n$.
2. Soit $\sigma, \tau \in D_{2n}$ comme dans le cours et considérons l'ensemble $S = \{\sigma^i, \sigma^i\tau \mid 0 \leq i \leq n-1\}$. Montrer que $|S| = 2n$.
3. Quels sont les ordres des éléments de D_{2n} ?

Exercice* 4.
Fixons un entier $n \geq 3$.

1. Prouvez les relations suivantes :
   (a) $\tau\sigma^i\tau = \sigma^{-i}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$;
   (b) $(\tau\sigma^j)^{-1}\sigma^i(\tau\sigma^j) = \sigma^{-i}$ pour tout $i, j \in \mathbb{Z}$;
   (c) $(\tau\sigma^j)^{-1}\tau\sigma^i(\tau\sigma^j) = \tau\sigma^{2j-i}$ pour tout $i, j \in \mathbb{Z}$.
   (d) $(\sigma^j)^{-1}\tau\sigma^i(\sigma^j) = \tau\sigma^{2j+i}$ pour tout $i, j \in \mathbb{Z}$.
2. Déterminez les classes de conjugaison de D_{2n}.
   Indication : elles seront différentes suivant la parité de n.
3. Déterminez le centre de D_{2n}.
4. Montrer que $\langle \sigma \rangle \leq D_{2n}$ est normal et montrer que $D_{2n}/\langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 5 (Quelques contre-exemples)**.** 1. Trouvez un groupe G et deux sous-groupes normaux $H, H' \trianglelefteq G$ tels que : $H \cong H'$ mais $G/H \ncong G/H'$.
Indication : on peut trouver un tel exemple avec $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

2. Trouvez un groupe G et un sous-groupe normal $H \trianglelefteq G$ non-trivial tel que $G/H \cong G$.
   Indication : on peut prendre $G = \mathbb{C}^*$ et H le noyau de l'application $z \mapsto z^2$.