

Exercices Structures Fondamentales

Semaine 12

EPFL, Semestre d'automne 2025

Exercice* 1.

Soit $f: G \rightarrow H$ un morphisme de groupes.

1. Si $F \leq H$, montrez que $f^{-1}F \subseteq G$ est un sous-groupe.
2. Si $F \trianglelefteq H$ est un sous-groupe normal, montrez que $f^{-1}F \subseteq G$ est un sous-groupe normal.
3. Si $F \leq G$ est un sous-groupe, montrez que $f(F) \subseteq H$ est un sous-groupe.
4. Si f est surjective et que $F \trianglelefteq G$ est un sous-groupe normal, montrez que $f(F) \subseteq H$ est un sous-groupe normal.
5. (THÉORÈME DE CORRESPONDENCE.) Soit G un groupe, $H \trianglelefteq G$ un sous-groupe normal et $q: G \rightarrow G/H$ l'application quotient. Montrez qu'on a une bijection

$$\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{l} \text{Sous-groupes } F \leq G \\ \text{tels que } H \subseteq F \end{array} \right) & \xrightarrow{1:1} & \left(\text{Sous-groupes } K \leq G/H \right) \\ F & \mapsto & q(F) \\ q^{-1}K & \leftarrow & K \end{array}$$

et que cette bijection est toujours valide si l'on ajoute les conditions que F et K sont normaux.

Exercice 2.

Soit $d, n \in \mathbb{Z}$ tel que $d|n$ et considérons le sous-groupe $d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Puisque $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est abélien, le sous-groupe est normal, nous pouvons donc considérer le quotient $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Montrez que

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.$$

Exercice 3. 1. Soit G, F des groupes et $H \triangleleft G$ un sous-groupe normal. Montrez qu'il existe une bijection

$$\text{Hom}(G/H, F) \cong \{\phi \in \text{Hom}(G, F) \mid H \subseteq \ker(\phi)\}.$$

2. Soit G un groupe et $n \geq 1$. Montrer qu'il existe une bijection

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, G) \cong \{g \in G \mid \text{ord}(g) \mid n\}.$$

3. Faites la liste des homomorphismes $\mathbb{Z}/27\mathbb{Z} \rightarrow S_5$.

Exercice 4.

Montrez que $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Exercice 5. 1. Soit $\sigma = (12345) \in S_5$. Déterminez le cardinal de la classe de conjugaison de σ .

2. Montrez qu'il n'existe pas d'homomorphisme surjectif $\phi: S_5 \rightarrow S_4$.