

Exercices Structures Fondamentales

Semaine 11

EPFL, Semestre d'automne 2025

Exercice 1. 1. Soit G un groupe. Montrez que le centre $Z(G)$ est égal à l'union des classes de conjugaison qui sont des singletons.

2. Montrez que $Z(S_2) = S_2$ et que $Z(S_n) = \{e\}$ pour tout $n \geq 3$.

Indication : étant donné $\sigma \in S_n$, construisez une transposition qui ne commute pas avec σ .

3. Montrez que $Z(A_3) = A_3$ et que $Z(A_n) = \{e\}$ pour $n \geq 4$.

Indication : étant donné $\sigma \in A_n$, construisez un 3-cycle qui ne commute pas avec σ .

Exercice 2.

Soit G un groupe fini abélien avec $|G| = 2k$ pour $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ un nombre impair. Montrer que G a un élément unique d'ordre 2.

Exercice 3. 1. Montrez que si $H \leq G$ est un sous-groupe d'indice 2, alors c'est un sous-groupe normal.

2. Soit G un groupe d'ordre 6 et $g \in G$ un élément d'ordre 3. Montrez que les seuls éléments d'ordre 3 de G sont g et g^2 .

3. Montrez qu'un groupe d'ordre 6 a exactement 2 éléments d'ordre 3.

Exercice* 4.

Soit G un groupe et $H < G$ un sous-groupe, et $K < H$ un sous-groupe de H .

1. Montrer que $K < G$.

2. Montrer que si $[G : H], [H : K] < \infty$ alors $[G : K] = [G : H][H : K]$.

Exercice 5 (Sous-groupes de A_4). 1. Soit $\sigma \in S_4$. Montrez que la conjugaison par σ induit un isomorphisme de A_4 .

2. Montrez que le sous-ensemble $\{\sigma \in A_4 \mid \sigma^2 = e\}$ est un sous-groupe d'ordre 4 de A_4 .
3. Si $H \leq A_4$ est un sous-groupe qui contient un produit de 2-cycles disjoints ainsi qu'un 3-cycle, montrez que $H = A_4$.
Indication : on peut supposer que le produits de 2-cycles disjoints de H est $(12)(34)$. Montrez que si $H \neq A_4$, alors H est d'ordre 6, et dériver une contradiction en montrant que H contient au moins 3 éléments d'ordre 3.
4. Si $H \leq A_4$ est un sous-groupe qui contient deux 3-cycles qui ne fixent pas le même élément, montrez que $H = A_4$.
Indication : par l'absurde, en utilisant Lagrange, montrez que nécessairement $|H| = 3$, et dérivez une contradiction.