Exercices structures fondamentales
Semaine 3

EPFL, Semestre d'automne 2025

Exercice 1.
Soit $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ et l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par :

$$f(n) = \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

1. Calculer les images suivantes : $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$
2. Montrer que f est bijective.

Exercice 2.
Soient $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to C$ des applications entre ensembles.

1. En supposant que les applications f et g sont toutes deux surjectives, montrer que la composition $g \circ f : A \to C$ est surjective.
2. En supposant que la composition $g \circ f$ est surjective, montrer que g est surjective.

Exercice 3.
Soient A, B deux ensembles, $f : A \to B$ une application, et définissons $\Phi : 2^A \to 2^B$ de la manière suivante : pour tout $E \in 2^A$ (i.e. $E \subseteq A$),

$$\Phi(E) = f(E)$$

où on définit $f(E) = \{f(e),\ e \in E\}$. Montrer que

$$\Phi \text{ est injective} \iff f \text{ est injective.}$$

Exercice 4.
Soient A et B deux ensembles finis.

1. Combien y a-t-il de fonctions $A \to B$?
2. Combien y a-t-il de fonctions injectives $A \hookrightarrow B$?