

## Structures fondamentales (MATH-113) — Examen final

21 janvier 2025, 9 h 15 – 12 h 15



Nom : Grothendieck Alexander

SCIPER : 42

Signature : \_\_\_\_\_

Numéro

1

Ce dossier d'examen contient 5 exercices, sur 24 pages, pour un total de 47 points. Veuillez utiliser l'espace quadrillé pour vos réponses. N'écrivez **PAS** dans la marge intérieure du livret.

Veuillez rédiger vos solutions sous l'exercice correspondant : sous chaque exercice, il y a l'espace quadrillé prévu à cet effet. Si vous avez besoin de davantage d'espace pour vos solutions, utilisez l'espace restant après la solution d'un autre exercice. Dans ce cas, notez soigneusement où votre solution continue. Si même cela ne suffit pas, demandez aux surveillant(e)s des feuilles additionnelles. Dans ce cas, écrivez vos noms et prénoms ainsi que le numéro de l'exercice que vous résolvez sur le papier additionnel. A la fin de l'examen, sous la surveillance d'un(e) surveillant(e), mettez-les dans le dossier d'examen, indiquez le nombre de pages additionnelles sur la feuille de présence, et signez-là. Vous n'êtes pas autorisés à utiliser vos propres feuilles de brouillon, nous les fournissons. Veuillez ne pas écrire vos solutions au crayon.

Il est interdit de commencer à lire l'examen avant que le signal ne soit explicitement donné. La durée totale de l'épreuve est 180 minutes. Durant les 20 dernières minutes, veuillez rester à votre place, même si vous avez fini. Les copies seront collectées par les surveillant(e)s à la fin de l'examen, et il vous sera alors demandé de rester assis.

La seule feuille de papier autorisée, autre que celles de ce dossier d'examen et les brouillons, est un aide-mémoire manuscrit d'une page A4 (possiblement recto-verso). Tous les documents devront être rendus à la fin de l'examen, y compris les brouillons et l'aide-mémoire. Les livres, notes de cours, et aide-mémoire de plus d'une page ne sont **PAS** autorisés. Aucun matériel électronique n'est autorisé. Veuillez présenter votre CAMIPRO sur le bord de votre table. Aucun sac ou manteau ne doit se trouver à votre place assise.

Vous pouvez résoudre chaque point de chaque exercice séparément. Si vous résolvez un point correctement en admettant les résultats des points précédents, vous recevrez le score maximal. Prenez soin de démontrer tous vos calculs, de justifier et d'expliquer toutes les étapes de votre raisonnement. Nous ne donnons le maximum de points que si la preuve est correcte et présente tous les détails importants.

Vous êtes autorisés à utiliser tous les résultats vus en cours ou en exercices, sauf si la question demande exactement un tel résultat ou un cas particulier évident d'un tel résultat. Lorsque vous utilisez un résultat du cours ou des exercices, vous devez soit le citer par son nom, soit citer la proposition précisément en disant : on a vu dans le cours que “[ici l'énoncé précis du résultat]”.

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	8	9	11	7	12	47
Score:						

**Exercice 1 [ 8 pts ]**

- (a) Donnez la définition d'une partition d'un ensemble  $A$ .
- (b) Soit  $\mathcal{X} \subset 2^A$  une partition de  $A$ . Montrez que

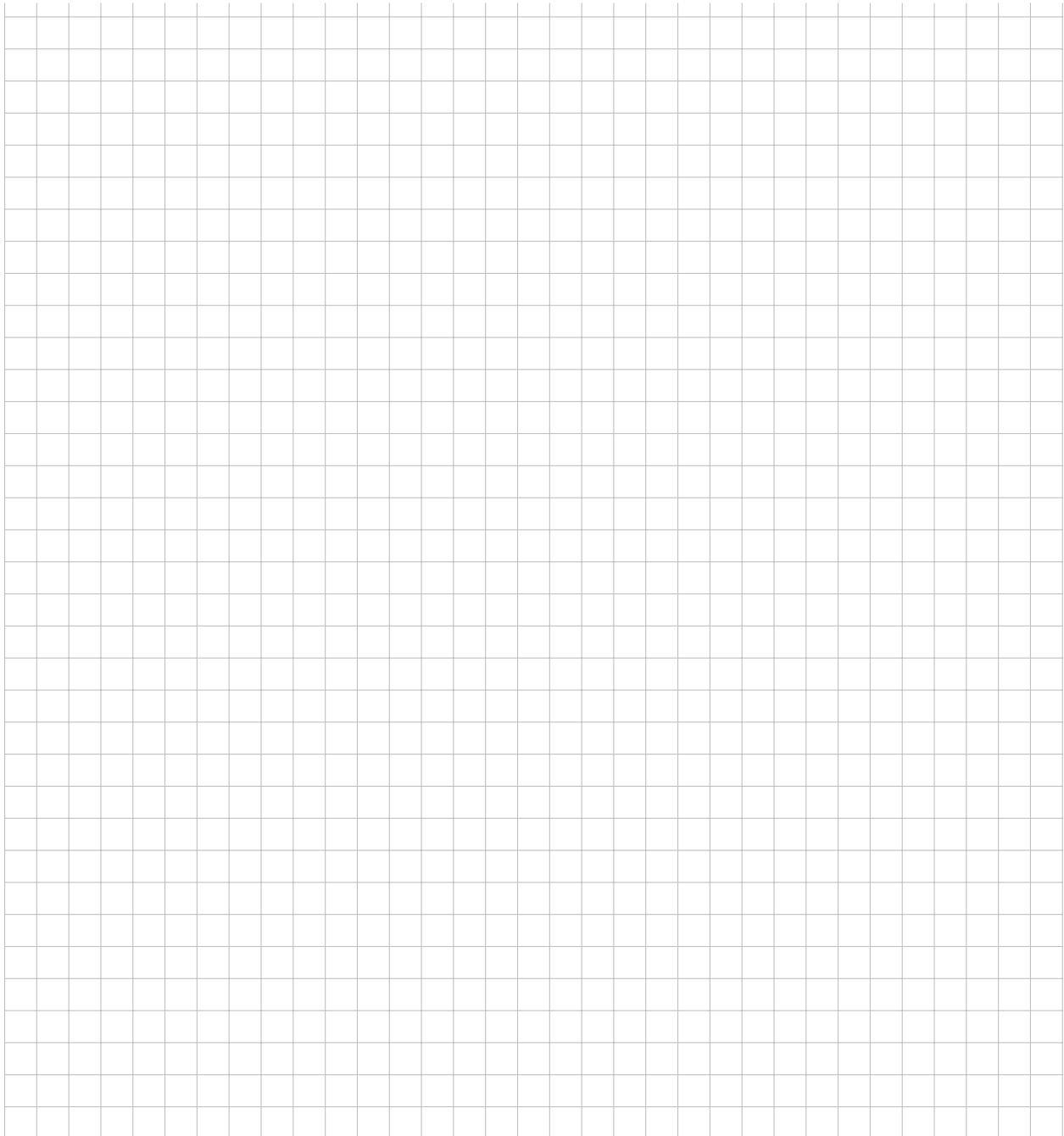
$$R_{\mathcal{X}} = \{(a, b) \in A \times A \mid \exists Y \in \mathcal{X} \text{ tel que } \{a, b\} \subset Y\}$$

est une relation d'équivalence sur  $A$ .

- (c) Pour deux partitions  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \subset 2^A$  on définit

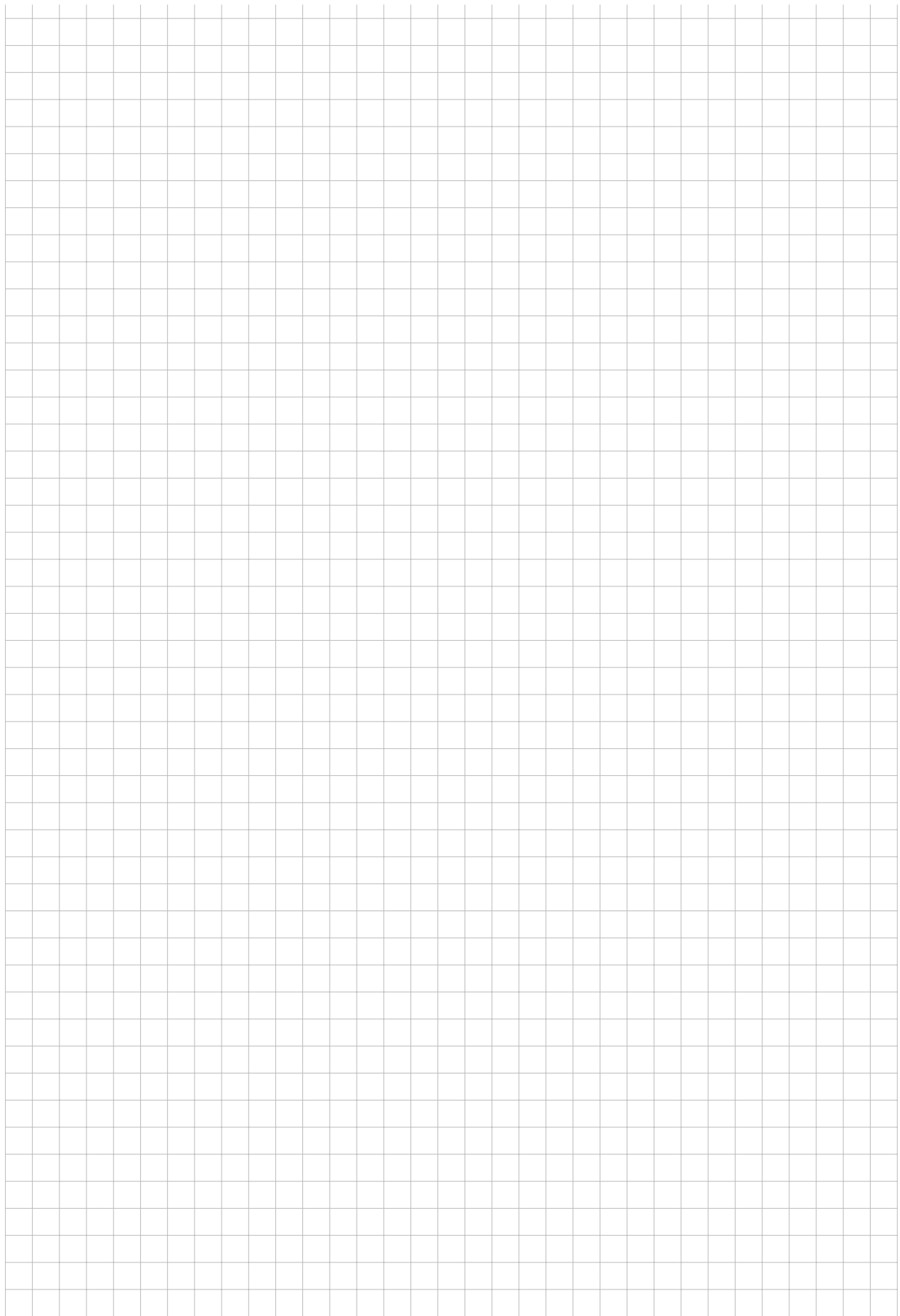
$$\mathcal{X}_{12} = \{Y_1 \cap Y_2 \mid Y_1 \in \mathcal{X}_1, Y_2 \in \mathcal{X}_2\} \subset 2^A.$$

Montrez que  $\mathcal{X}_{12}$  est une partition et que  $R_{\mathcal{X}_{12}} = R_{\mathcal{X}_1} \cap R_{\mathcal{X}_2}$ .









**Exercice 2 [ 9 pts ]**

Soit  $n \geq 4$  pair et

$$D_{2n} = \langle \sigma, \tau \rangle = \{ \sigma^i, \sigma^i \tau \mid 0 \leq i \leq n-1 \}$$

le groupe diédral comme vu dans le cours.

(a) Montrez que le sous-groupe  $\langle \sigma^2 \rangle \leq D_{2n}$  est normal.

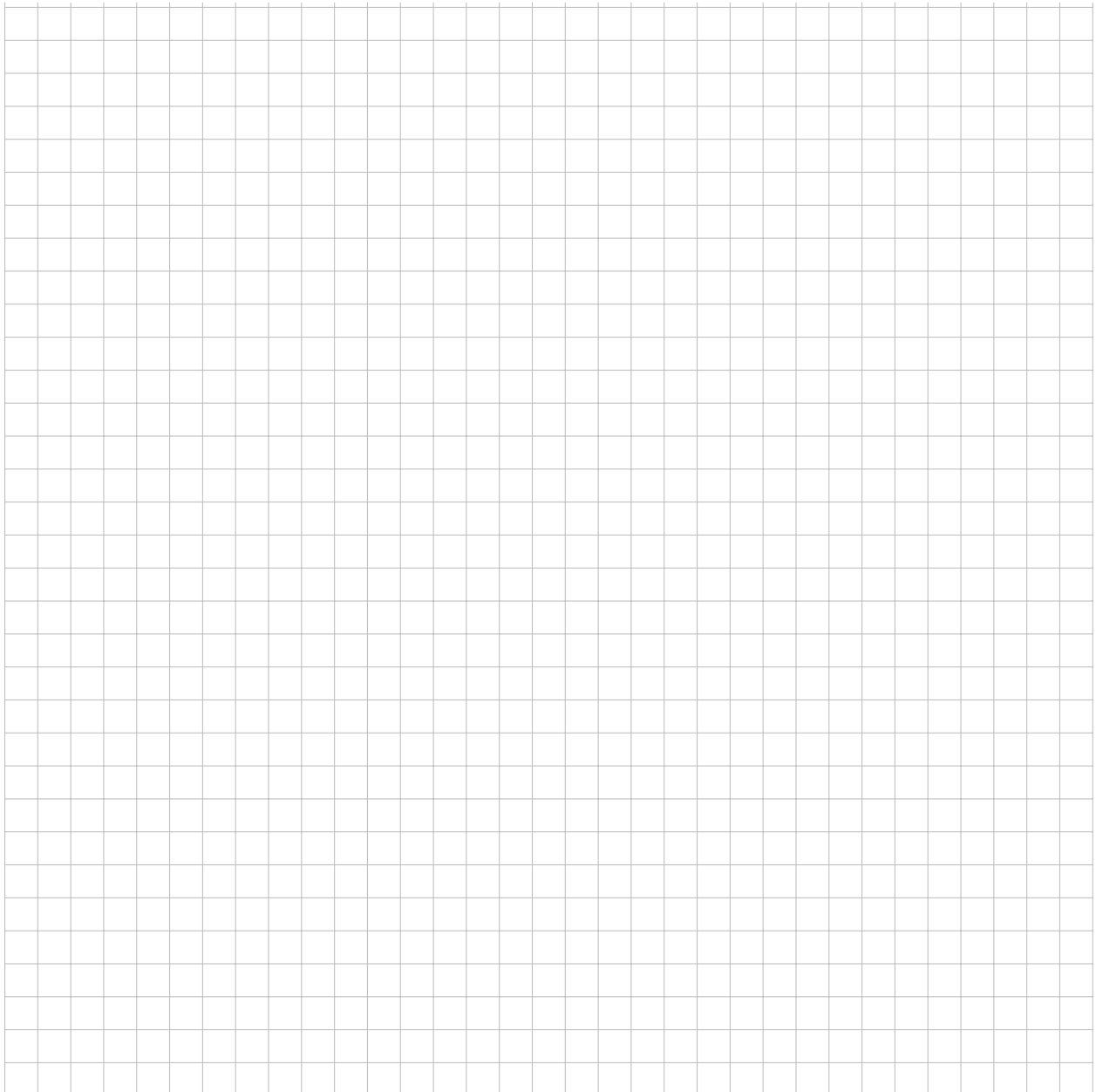
(b) Montrez qu'il existe un unique homomorphisme

$$\phi : D_{2n} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

tel que  $\phi(\sigma) = ([1], [0])$  et  $\phi(\tau) = ([0], [1])$ .

(c) En utilisant les deux points précédents, montrez qu'il existe un isomorphisme

$$D_{2n}/\langle \sigma^2 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$









**Exercice 3** [ 11 pts ]

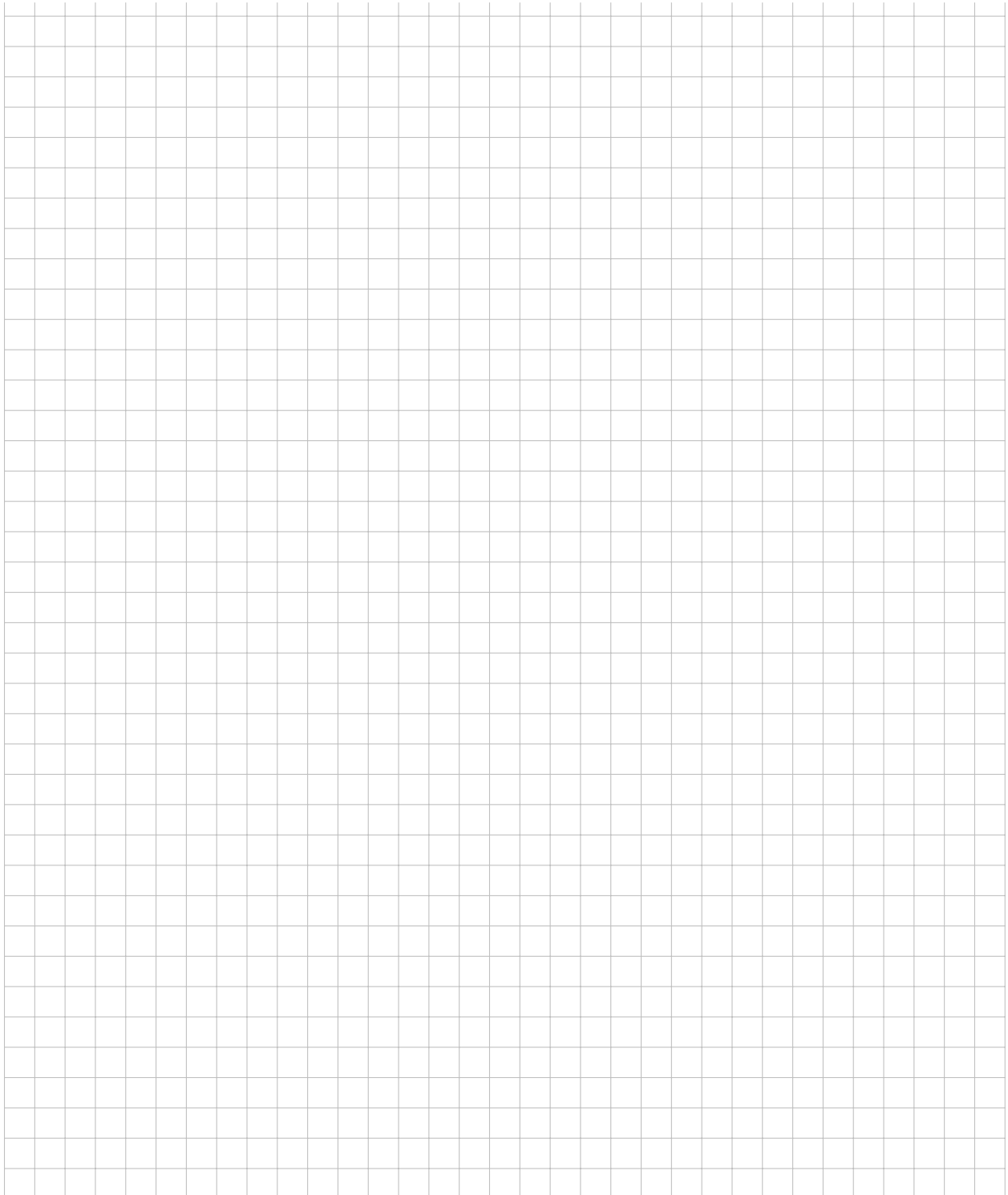
(a) Déterminez tous les entiers  $n \geq 1$  tel qu'il existe un sous-groupe de  $S_4$  isomorphe à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

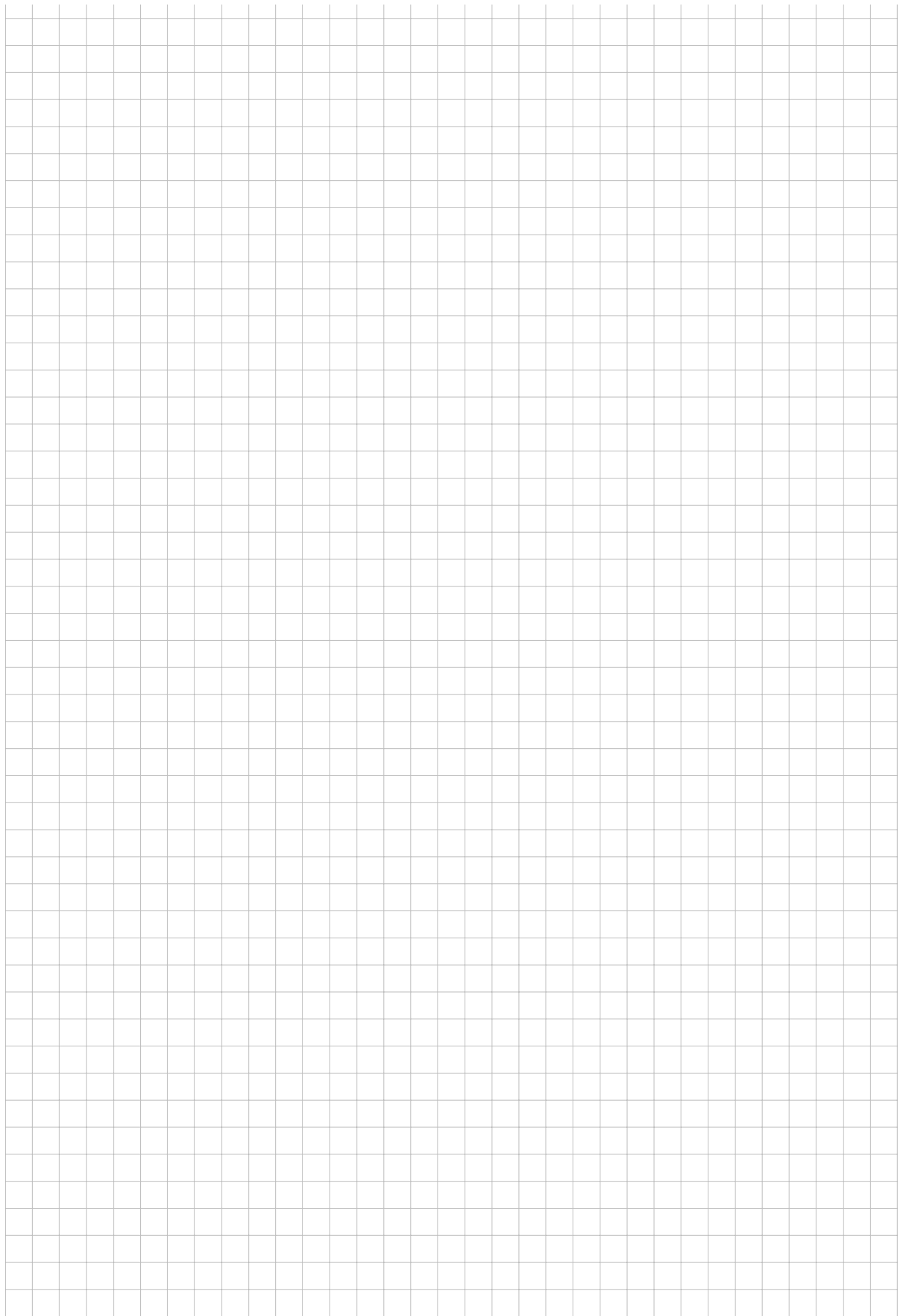
(b) Déterminez le plus petit entier  $n \geq 1$  tel que pour tous  $\sigma \in S_4$  on a  $\sigma^n = e$ .

(c) Soit  $\sigma = (12345) \in S_5$ . Déterminez le cardinal de la classe de conjugaison de  $\sigma$ .

*Rappel: La classe de conjugaison d'un élément  $g \in G$  est  $\{hgh^{-1} \mid h \in G\} \subseteq G$ .*

(d) Montrez qu'il n'existe pas d'homomorphisme surjectif  $\phi : S_5 \rightarrow S_4$ .









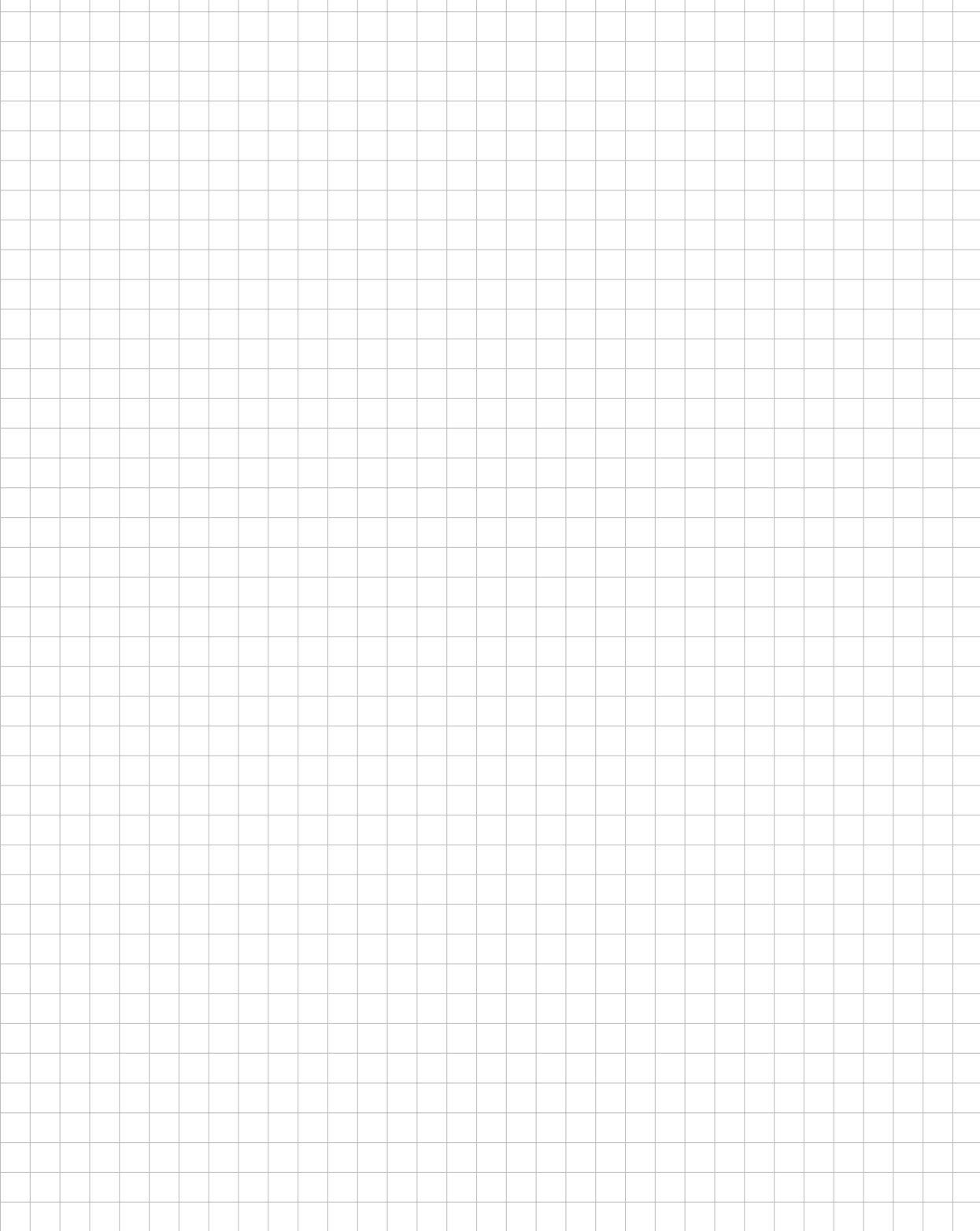
**Exercice 4 [ 7 pts ]**

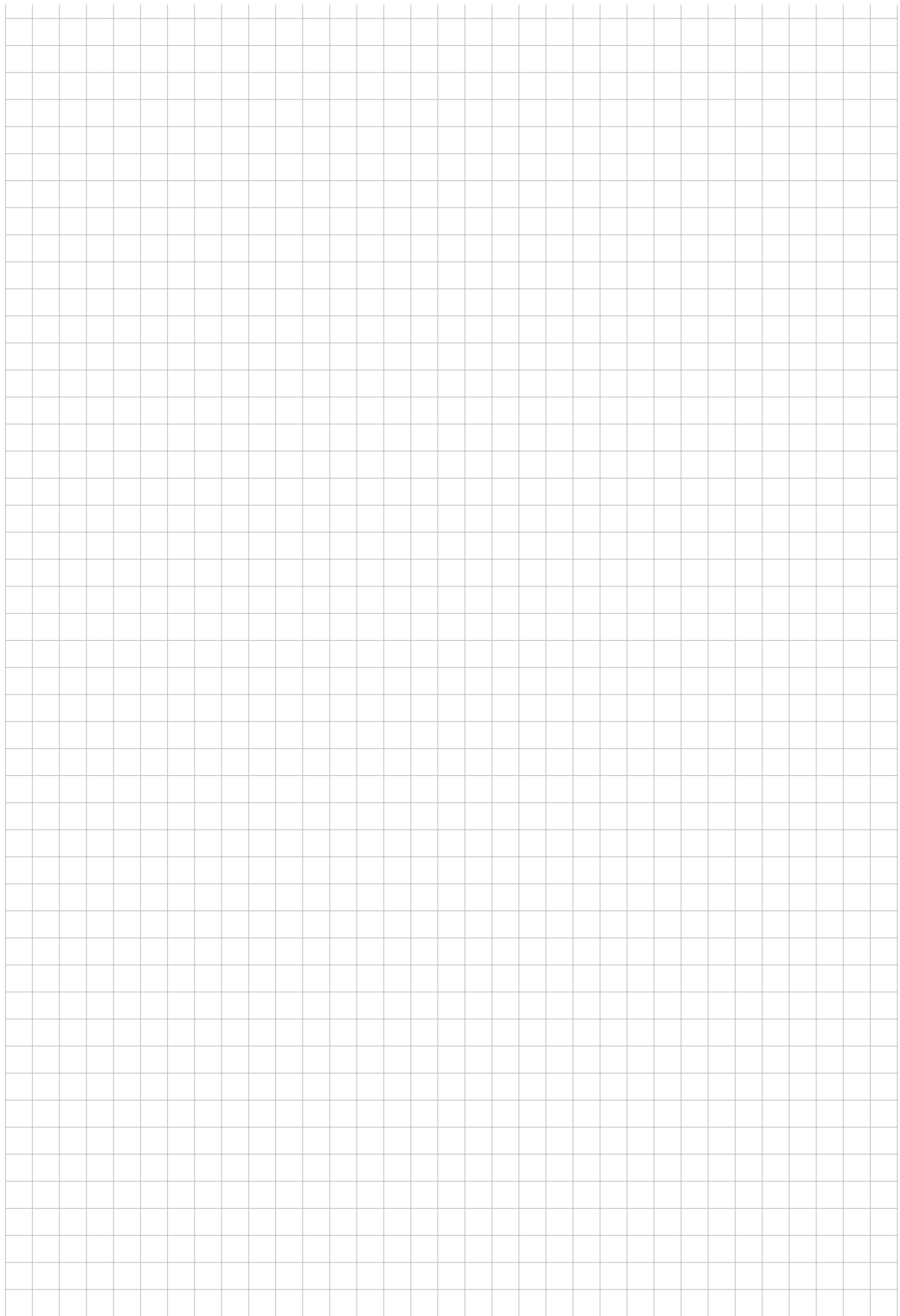
Soient  $G$  un groupe,  $M \triangleleft G, N \triangleleft G$  et  $M < N$ .

(a) Montrer que  $M \triangleleft N$  et  $N/M \triangleleft G/M$ .

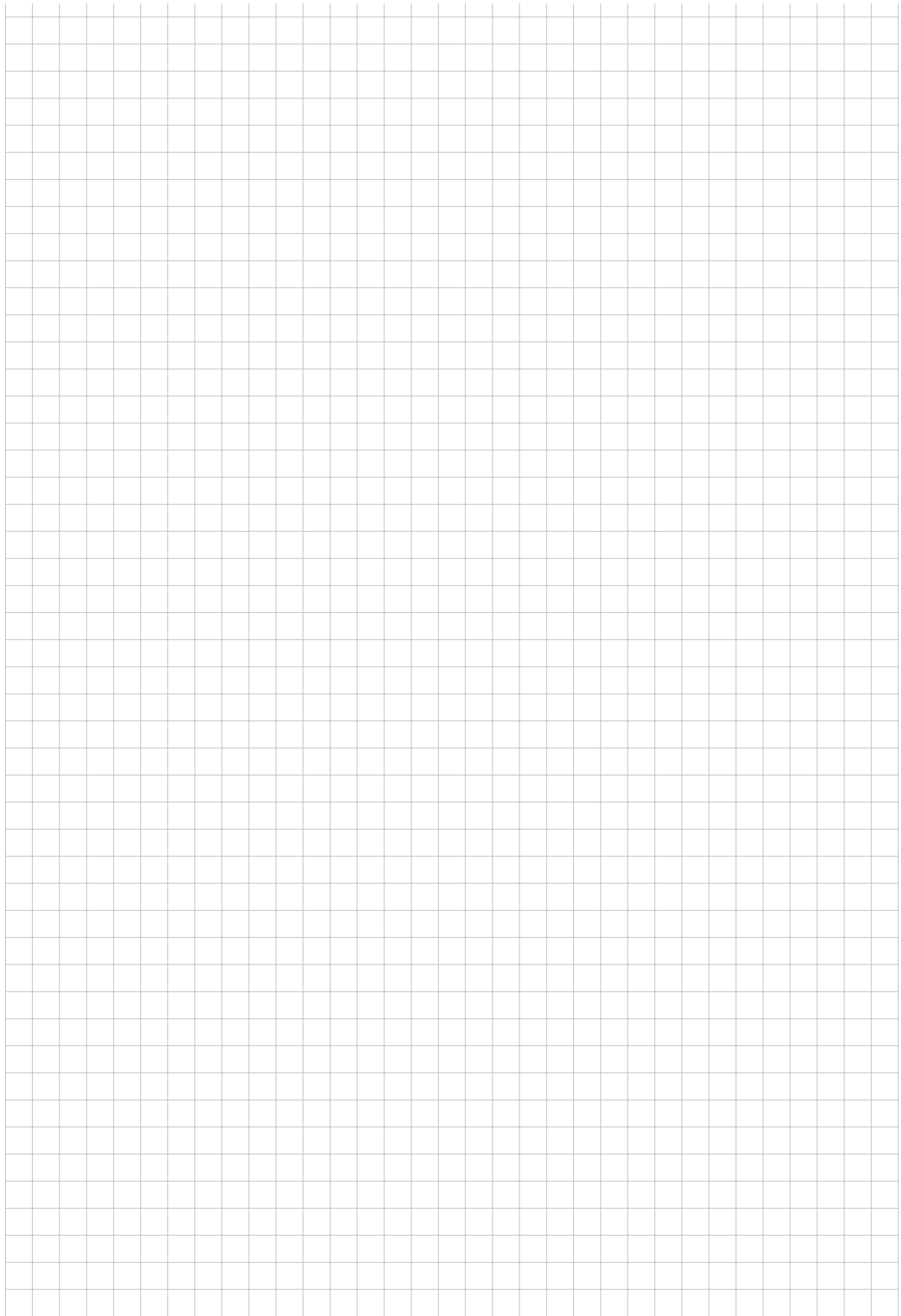
(b) Montrer que

$$(G/M)/(N/M) \cong G/N$$









**Exercice 5** [ 12 pts ]

Soit  $G$  un groupe et  $g, h \in G$ . On définit le commutateur  $[g, h] \in G$  de  $g$  et  $h$  par la formule

$$[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}.$$

Le sous-groupe des commutateurs  $[G, G] \leq G$  est défini par

$$[G, G] = \langle S \rangle,$$

où  $S = \{[g, h] \mid g, h \in G\} \subset G$ .

(a) Montrez pour tout  $f, g, h, \in G$  les identités  $[g, h]^{-1} = [h, g]$  et  $f[g, h]f^{-1} = [fgf^{-1}, fhf^{-1}]$ .

(b) Montrez que chaque élément  $g \in [G, G]$  peut s'écrire comme

$$g = [g_1, h_1][g_2, h_2] \dots [g_r, h_r],$$

où  $r \geq 0$  et  $g_i, h_i \in G$  pour  $1 \leq i \leq r$ .

(c) Montrez que  $[G, G]$  est un sous-groupe normal de  $G$ .

(d) Montrez que  $[S_n, S_n] \subset A_n$ .

(e) Montrez que  $[S_n, S_n]$  contient tous les 3-cycles de  $S_n$  et déduisez que  $[S_n, S_n] = A_n$ .

