Structures algébriques (MATH-113) — Examen final

27 janvier 2023, 9 h 15 – 12 h 15

Nom : Grothendieck Alexander

SCIPER : 42

Signature : ______________________

Numéro

1

Ce dossier d'examen contient 6 exercices, sur 28 pages, pour un total de 100 points. Veuillez utiliser l'espace quadrillé pour vos réponses. N'écrivez **PAS** dans la marge intérieure du livret.

Veuillez rédiger vos solutions sous l'exercice correspondant : sous chaque exercice, il y a l'espace quadrillé prévu à cet effet. Si vous avez besoin de davantage d'espace pour vos solutions, utilisez l'espace restant après la solution d'un autre exercice. Dans ce cas, notez soigneusement où votre solution continue. Si même cela ne suffit pas, demandez aux surveillant(e)s des feuilles additionnelles. Dans ce cas, écrivez vos noms et prénoms ainsi que le numéro de l'exercice que vous résolvez sur le papier additionnel. A la fin de l'examen, sous la surveillance d'un(e) surveillant(e), mettez-les dans le dossier d'examen, indiquez le nombre de pages additionnelles sur la feuille de présence, et signez-là. Vous n'êtes pas autorisés à utiliser vos propres feuilles de brouillon, nous les fournissons. Veuillez ne pas écrire vos solutions au crayon.

Il est interdit de commencer à lire l'examen avant que le signal ne soit explicitement donné. La durée totale de l'épreuve est 180 minutes. Durant les 20 dernières minutes, veuillez rester à votre place, même si vous avez fini. Les copies seront collectées par les surveillant(e)s à la fin de l'examen, et il vous sera alors demandé de rester assis.

La seule feuille de papier autorisée, autre que celles de ce dossier d'examen et les brouillons, est un aide-mémoire manuscrit d'une page A4 (possiblement recto-verso). Tous les documents devront être rendus à la fin de l'examen, y compris les brouillons et l'aide-mémoire. Les livres, notes de cours, et aide-mémoire de plus d'une page ne sont **PAS** autorisés. Aucun matériel électronique n'est autorisé. Veuillez présenter votre CAMIPRO sur le bord de votre table. Aucun sac ou manteau ne doit se trouver à votre place assise.

Vous pouvez résoudre chaque point de chaque exercice séparément. Si vous résolvez un point correctement en admettant les résultats des points précédents, vous recevrez le score maximal. Prenez soin de démontrer tous vos calculs, de justifier et d'expliquer toutes les étapes de votre raisonnement. Nous ne donnons le maximum de points que si la preuve est correcte et présente tous les détails importants.

Vous êtes autorisés à utiliser tous les résultats vus en cours ou en exercices, sauf si la question demande exactement un tel résultat ou un cas particulier évident d'un tel résultat. Lorsque vous utilisez un résultat du cours ou des exercices, vous devez soit le citer par son nom, soit citer la proposition précisément en disant : on a vu dans le cours que "[ici l'énoncé précis du résultat]".

Question:	1	2	3	4	5	6	Total
Points:	12	20	18	18	20	12	100
Score:							

Exercice 1 [**12 pts**]

Montrez que si $H \leq \mathbb{Z}$ est un sous-groupe du groupe additif des entiers, alors il existe un entier $n \geq 0$ tel que $H = n\mathbb{Z}$.

[*Vous ne pouvez utiliser que la théorie des nombres apprise dans ce cours, et le fait que H contient l'élément neutre et qu'il est stable par inverse, et par addition. En particulier, vous ne pouvez utiliser aucun autre théorème ou fait de théorie des groupes.*]

Exercice 2 [**20 pts**]

(1) Énoncez la propriété universelle des quotients de groupes.

(2) Énoncez le premier théorème d'isomorphisme, ce que l'on appelle le Thm 1 ci-dessous.

(3) Énoncez le deuxième théorème d'isomorphisme, ce que l'on appelle le Thm 2 ci-dessous.

(4) Définissez l'homomorphisme ϕ auquel on applique le Thm 1 dans la preuve du Thm 2 apprise dans le cours. Quelles propriétés de ϕ faut-il démontrer pour déduire le Thm 2 du Thm 1?

(5) Démontrez les propriétés de ϕ demandées dans le point précédent. *Dans cette démonstration vous pouvez utiliser sans preuve que si H et F sont les 2 groupes concernés dans le deuxième théorème d'isomorphisme, alors $H \cdot F = F \cdot H = \langle H, F \rangle$.*

Exercice 3 [**18 pts**]

(1) Démontrez qu'il existe un unique sous-groupe d'ordre 5 de D_{10}.

(2) Soit G un groupe fini tel que $5 \nmid |G|$. Démontrez qu'il y a une bijection entre les deux ensembles suivants donnée par $g = \phi(\tau)$:

$$\{ \phi : D_{10} \to G \mid \phi \text{ est un homomorphisme} \} \longleftrightarrow \{ g \in G \mid g^2 = e \}.$$

[*Vous pouvez utiliser sans preuve que pour chaque entier $n \geq 2$ et chaque groupe F il y a une bijection entre les ensemble suivantes donnée par $f = \eta\big([1]\big)$:*

$$\{ \eta : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to F \mid \eta \text{ est un homomorphisme} \} \longleftrightarrow \{ f \in F \mid f^n = e \}.]$$

(3) Calculez le nombre d'homomorphismes $D_{10} \to U(3, \mathbb{F}_3)$.

Exercice 4 [**18 pts**]

Soit $g = \tau\sigma^i \in D_{2n} = G$ pour deux entiers $i, n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. Fixons aussi un autre entier $j \in \mathbb{Z}$.

(1) Calculez un entier s tel que $\tau\sigma^s = fgf^{-1}$ pour $f = \sigma^j$.

(2) Calculez un entier r tel que $\tau\sigma^r = fgf^{-1}$ pour $f = \tau\sigma^j$.

(3) Supposons que n est impair. Démontrez que

$$\left\{ f \in G \;\middle|\; fgf^{-1} = g \right\} = \{e, g\}.$$

(4) Supposons que $n \geq 3$ est premier. Listez tous les sous-groupes abéliens de G. Combien sont-ils?

Exercice 5 [**20 pts**]

Dans cet exercice on travaille dans le groupe $G = B(3,k)$ pour un corps quelconque k. Soit $H \leq G$ le sous-groupe suivant de G :

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in k \right\}.$$

Vous pouvez admettre sans preuve que H est un sous-groupe de G.

(1) Calculez les multiplications suivantes des éléments de G:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} =$$

(2) Démontrez que $N_G(H)$ est le sous-groupe suivant de G :

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \;\middle|\; b, c \in k,\ a, d, f \in k \setminus \{0\} \right\}.$$

(3) Admettons sans preuve que le sous-ensemble suivant de G est un sous-groupe de G :

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \;\middle|\; b \in k,\ a, f \in k \setminus \{0\} \right\}.$$

Démontrez que si $k = \mathbb{F}_3$, alors $M \cong D_{12}$.

[*Vous pouvez utiliser l'affirmation d'une des fiches d'exercice que* $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_\phi (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong D_{12}$ *si* $\phi \not\equiv \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}$.]

Exercice 6 [**12 pts**]

Considérons les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$S = \left\{ \ (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ \middle| \ \lfloor a \rfloor \leq b \leq \lceil a \rceil \ \right\}$$

et

$$T = \left\{ \ (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ \middle| \ \lfloor a \rfloor \leq b < \lfloor a \rfloor + 1 \text{ et } \lceil a \rceil - 1 < b \leq \lceil a \rceil \ \right\}$$

où pour un $x \in \mathbb{R}$ on a utilisé les définitions suivantes :

- $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ est la *partie entière inférieure* de x définie par les inégalités $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$;
- $\lceil x \rceil \in \mathbb{Z}$ est la *partie entière supérieure* de x définie par les inégalités $\lceil x \rceil \geq x > \lceil x \rceil - 1$.

(1) Démontrez que S n'est pas une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

(2) Donnez une partition $\mathcal{P} \subseteq 2^{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}$ tel que T est le même sous-ensemble de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que la relation d'équivalence associée à $\mathcal{P}$. Autrement dit, vous devez faire les étapes suivantes :

- Donnez $\mathcal{P}$.
- Démontrez que $(a,b) \in T \iff \exists X \in \mathcal{P} \colon \{a,b\} \subseteq X$.

En particulier, vous n'avez PAS besoin de démontrer les 3 propriétés qui définissent une relation d'équivalence (réflexivité, transitivité et associativité).