Durée : 144 minutes

Algèbre linéaire
Examen
Partie commune
Automne 2024

Enoncé

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

$+3$ points si la réponse est correcte,

0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,

-1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

$+1$ point si la réponse est correcte,

0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,

-1 point si la réponse est incorrecte.

Notations

– Pour une matrice A, a_{ij} désigne l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice.
– Pour un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, x_i désigne la i-ème composante de $\vec{x}$.
– I_m désigne la matrice identité de taille $m \times m$.
– $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.
– $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices de taille $m \times n$ à coefficients réels.
– Pour $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique est défini par $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$.
– Pour $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, la norme euclidienne est définie par $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question, marquer la case correspondant à la réponse correcte. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : La droite qui approxime le mieux au sens des moindres carrés les points $(0,2)$, $(1,1)$, $(2,1)$, $(5,0)$ est

☐ $y = \frac{11}{5} + \frac{3}{5}x$. ☐ $y = 2 - \frac{3}{8}x$. ☐ $y = \frac{9}{2} - \frac{5}{2}x$. ☐ $y = \frac{12}{7} - \frac{5}{14}x$.

Question 2 : Soit $T\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right) = b_{12} - (b_{11} + b_{22})t + b_{21}t^2 \,.$$

Soient

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C} = \left\{1,\, 1+t^2,\, t+t^2\right\}$$

des bases ordonnées de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ respectivement. La matrice A associée à T par rapport à la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ et la base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, telle que $\big[T(B)\big]_{\mathcal{C}} = A\big[B\big]_{\mathcal{B}}$ pour tout $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, satisfait

☐ $a_{12} = -6$. ☐ $a_{12} = 3$. ☐ $a_{12} = 2$. ☐ $a_{12} = -4$.

Question 3 : Soit $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ une base ordonnée de $\mathbb{R}^3$ et soit $\mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\}$ la base ordonnée de $\mathbb{R}^3$ formée des vecteurs

$$\vec{c}_1 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2\,, \quad \vec{c}_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_3 \quad \text{et} \quad \vec{c}_3 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3\,.$$

Soit P la matrice de changement de base telle que $\big[\vec{v}\big]_{\mathcal{C}} = P\big[\vec{v}\big]_{\mathcal{B}}$ pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Alors

☐ $p_{23} = 1$. ☐ $p_{23} = 2$. ☐ $p_{23} = -\frac{2}{3}$. ☐ $p_{23} = 0$.

Question 4 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 3 & 1 \\ 2\pi & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Alors l'inverse $B = A^{-1}$ de la matrice A est tel que

☐ $b_{24} = 3$. ☐ $b_{21} = 7$. ☐ $b_{23} = 5$. ☐ $b_{22} = 1$.

Question 5 : Soit a un nombre réel. Le système d'équations linéaires

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a\,x_1 & & & + & x_3 & & & = & 1 \\ & & a\,x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & + & a\,x_3 & & & = & 1 \\ & & x_2 & & & + & a\,x_4 & = & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & & & = & a \end{array}\right.$$

possède exactement une solution si et seulement si

- ☐ $a \in \{-2, 1\}$.
- ☐ $a = -2$.
- ☐ $a \in \{-1, 1\}$.
- ☐ $a \in \{-1, 1, -2\}$.

Question 6 : Soit A une matrice de taille 2×2 telle que $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$ respectivement. Alors la matrice inverse A^{-1} est

- ☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.
- ☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -18 & -11 \end{pmatrix}$.
- ☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.
- ☐ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

Question 7 : Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et soit $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - y - 5z \\ -2x + y + 7z \\ x - 2z \end{pmatrix}.$$

Alors

- ☐ le vecteur $\vec{v}$ n'est ni dans $\mathrm{Ker}(T)$, ni dans $\mathrm{Im}(T)$.
- ☐ le vecteur $\vec{v}$ est dans $\mathrm{Ker}(T)$, mais pas dans $\mathrm{Im}(T)$.
- ☐ le vecteur $\vec{v}$ est dans $\mathrm{Im}(T)$ et dans $\mathrm{Ker}(T)$.
- ☐ le vecteur $\vec{v}$ est dans $\mathrm{Im}(T)$, mais pas dans $\mathrm{Ker}(T)$.

Question 8 : Soient

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

trois vecteurs de $\mathbb{R}^5$ et soit $W = \mathrm{Vect}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$. L'algorithme de Gram-Schmidt appliqué à $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ fournit une base orthogonale $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de W telle que

- ☐ $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Question 9 : Les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

sont

- ☐ -2, -1 et 2.
- ☐ -1 et 2.
- ☐ -1, 1 et 2.
- ☐ -2, -1 et 1.

Question 10 : Soit W l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille 2×2. La deuxième coordonnée de la matrice $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in W$ dans la base ordonnée $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ de W est

- ☐ $-\frac{3}{4}$.
- ☐ $\frac{1}{4}$.
- ☐ -2.
- ☐ 1.

Question 11 : Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

possède une solution unique telle que

- ☐ $x_4 = 1$.
- ☐ $x_4 = \frac{1}{2}$.
- ☐ $x_4 = -2$.
- ☐ $x_4 = -\frac{5}{2}$.

Question 12 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ définie par

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

- ☐ $\det(B) = \alpha^2(\alpha - 1)^2$.
- ☐ $\det(B) = \alpha(\alpha + 2)(\alpha - 1)^2$.
- ☐ $\det(B) = \alpha^2(\alpha^2 - 4)$.
- ☐ $\det(B) = \alpha(\alpha + 1)(\alpha^2 - 4)$.

Question 13 : Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Alors une solution au sens des moindres carrés $\widehat{x} = \begin{pmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \end{pmatrix}$ de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ satisfait

- ☐ $\widehat{x}_1 = -2$.
- ☐ $\widehat{x}_1 = 2$.
- ☐ $\widehat{x}_1 = -1$.
- ☐ $\widehat{x}_1 = 1$.

Question 14 : Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$W = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\} .$$

Soit $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ une base de W. Alors la projection orthogonale de $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ sur W est

☐ $\begin{pmatrix} 3/2 \\ 4 \\ 6 \\ 7/2 \end{pmatrix}$.

☐ $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \\ 3 \\ -1/2 \end{pmatrix}$.

☐ $\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$.

☐ $\begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$.

Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 15 : L'ensemble

$$\{p \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \mid p(1)\,p(2) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 16 : Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ sont des vecteurs tels que leurs projections orthogonales sur le sous-espace W sont égales, alors le vecteur $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ est orthogonal à W.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 17 : Soient A et B deux matrices de taille 3×3. Si $\det(A) = 2$, alors

$$\det(BA^{-1}B) = \frac{1}{2}\det(B)^2 .$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 18 : Soient V et W deux espaces vectoriels et soient T, $S\colon V \to W$ deux applications linéaires. Si $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(S)$, alors $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Im}(S)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 19 : Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ est telle que $\det(A) = 0$, alors $\lambda = 0$ est une valeur propre de A.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 20 : Si A est une matrice de taille $m\times n$ telle que $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^m$, alors pour tout choix de $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, le système $A\vec{x} = \vec{b}$ possède une solution unique.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : Soit V un espace vectoriel et soit $T\colon V \to \mathbb{R}$ une application linéaire. Si v_1, v_2, $v_3 \in V$ sont tels que

$$T(v_1) = 2\,, \quad T(v_2) = 3 \quad \text{et} \quad T(v_3) = 1\,,$$

alors $v_1 - v_2 + v_3$ est dans $\mathrm{Ker}(T)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 22 : Soient $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \in \mathbb{R}^n$ des vecteurs orthonormaux, avec $0 < k < n$.

Si $W = \mathrm{Vect}\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ est un vecteur dans $W^\perp$, alors $\mathrm{Vect}\{\vec{v}, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k+1$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 23 : Soit V un espace vectoriel et soient v_1, v_2, v_3 trois vecteurs de V. Si l'ensemble $\{v_1\,,\, v_2\,,\, v_3\}$ est linéairement indépendant, alors l'ensemble $\{v_1 - v_2\,,\, v_1 - v_3\,,\, v_2 - v_3\}$ est linéairement indépendant.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 24 : Le nombre de lignes non nulles dans la forme échelonnée réduite d'une matrice est égal à son rang.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Soient A une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $n \times m$. Si AB est inversible, alors A et B sont inversibles.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : Soient A et B deux matrices de taille $n \times n$. Si A et B sont des matrices symétriques, alors $A + B$ est diagonalisable.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 27 : Soit A une matrice carrée de taille 3×3. Si $p(\lambda) = -\lambda(1 - \lambda)(2 - \lambda)$ est le polynôme caractéristique de A, alors $\text{rang}(A) = 2$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 28 : Si $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ sont telles que $(A + B)^T = A + B$, alors A et B sont symétriques.

☐ VRAI ☐ FAUX

Troisième partie, questions de type ouvert

– Répondre dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé.
– Votre réponse doit être soigneusement justifiée : toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse.
– Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 29 : *Cette question est notée sur 3 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 *Réservé au correcteur*

Soit A une matrice de taille $n \times n$ et soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ tels que les vecteurs $A\vec{u}$, $A\vec{v}$, $A\vec{w}$ sont linéairement indépendants. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont linéairement indépendants.

Question 30 : *Cette question est notée sur 3 points.*

$\square_0$ $\square_1$ $\square_2$ $\square_3$ *Réservé au correcteur*

Soit A une matrice de taille $n \times n$ telle que $A^3 = I_n$.

(a) Déterminer $\mathrm{Ker}(A)$.

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A. Déterminer la valeur de λ.

Question 31 : *Cette question est notée sur 4 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 *Réservé au correcteur*

Soit $A = \begin{pmatrix} 2025 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2025 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2025 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2025 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ et soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

(a) Montrer que $\vec{v}$ est un vecteur propre de A et déterminer la valeur propre correspondante.

(b) Donner une base de l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 2024$.

(c) Donner une matrice diagonale D semblable à la matrice A.