

Série 14 (Corrigé)

Exercice 1

Les valeurs singulières non nulles de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

sont

$$\square 4 \text{ et } 36 \qquad \square \sqrt{2} \text{ et } 2$$

$$\square 2 \text{ et } 6 \qquad \square 2 \text{ et } 4$$

Solution : Les valeurs singulières sont 2 et 6.

Exercice 2

Trouver la décomposition SVD de la matrice suivante

$$A := \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Solution : Les valeurs singulières de A sont $\sqrt{4} = 2$ et $\sqrt{1} = 1$. Donc la matrice Σ est donnée par :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs propres associés sont chacune des valeurs propres de $A.A^T$ sont

$$v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donc la matrice V est donnée par

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Enfin, pour connaître la matrice U , on calcule $A.v_1$ et $A.v_2$, puis on divise par les valeurs singulières. On obtient donc U égal à

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

On vérifie aisément alors que $A = U.\Sigma.V^T$.

Exercice 3

- (a) Soit A une matrice de taille $m \times n$. Montrer que le rang de AA^T est égal au rang de A .
- (b) Soit A une matrice de taille $m \times n$ avec $m > n$. Montrer que AA^T n'est pas inversible.

Solution :

- (a) *Méthode 1 : on peut montrer que $\text{Col}(A) = \text{Im}(T_A) = \text{Im}(T_{AA^T}) = \text{Col}(AA^T)$; dès lors, $\text{rg}(A) = \text{rg}(AA^T)$. On vérifie que $\text{Col}(A) \supseteq \text{Col}(AA^T)$. En effet si $y \in \mathbb{R}^m$ s'écrit $AA^T x$ pour un certain $x \in \mathbb{R}^m$, alors $y = A(A^T x) \in \text{Col}(A)$. Réciproquement, montrons que $\text{Col}(A) \subseteq \text{Col}(AA^T)$: si $y \in \text{Col}(A)$, alors il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = Ax$. On cherche $z \in \mathbb{R}^m$ tel que $y = Ax = AA^T z$. L'équation $AA^T z = Ax$ est l'équation normale associée à l'équation linéaire $A^T z = x$. Elle admet donc toujours une solution z telle que $y = Ax = AA^T z$. On en déduit que $\text{Col}(A) \subseteq \text{Col}(AA^T)$, d'où $\text{Col}(A) = \text{Col}(AA^T)$.*

Méthode 2 : on peut montrer que $\text{Ker}(A^T) = \text{Ker}(AA^T)$. Dès lors, d'après le théorème du rang :

$$m = \dim(\text{Ker}(A^T)) + \text{rg}(A^T)$$

$$m = \dim(\text{Ker}(AA^T)) + \text{rg}(AA^T)$$

Comme $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T)$, on en déduit que $\text{rg}(A) = \text{rg}(AA^T)$. On vérifie que $\text{Ker}(A^T) \subseteq \text{Ker}(AA^T)$. En effet, si $x \in \mathbb{R}^m$ vérifie $A^T x = 0$, alors $AA^T x = 0$. Réciproquement, montrons que $\text{Ker}(A^T) \supseteq \text{Ker}(AA^T)$. Si $AA^T x = 0$, alors $(A^T x) \cdot (A^T x) = x^T AA^T x = 0$, donc $A^T x = 0$, par définie positivité du produit scalaire. On en déduit que $\text{Ker}(A^T) = \text{Ker}(AA^T)$.

- (b) *Si $m > n$, alors $\text{rg}(A) \leq n < m$ (on peut voir l'inégalité $\text{rg}(A) \leq n$ comme une conséquence du théorème du rang, ou plus simplement, observer que $\text{Col}(A)$ est engendré par n vecteurs). Donc $\text{rg}(AA^T) = \text{rg}(A) < m$. Comme AA^T est carrée de taille m , on en déduit que AA^T n'est pas inversible.*

Exercice 4

Soit A une matrice de taille $n \times n$.

- i) Montrer que A est inversible si et seulement si A possède n valeurs singulières non nulles.

Solution : *On a $A = U\Sigma V^T$ avec U, V des matrices orthogonales de taille $n \times n$ et Σ la matrice diagonale des valeurs singulières. On a $\det(A) = \det(U) \det(\Sigma) \det(V)$, avec $\det(U) \neq 0$ et $\det(V) \neq 0$ (car U et V sont inversibles), ainsi*

$$\det(A) \neq 0 \iff \det(\Sigma) \neq 0$$

et A est inversible si et seulement si ses valeurs singulières sont non nulles.

- ii) Si A est inversible et $U\Sigma V^T$ est une décomposition en valeurs singulières de A , donner une décomposition en valeurs singulières de A^{-1} .

Solution :

On a $A = U\Sigma V^T$ avec U, V des matrices orthogonales de taille $n \times n$ et Σ la matrice diagonale des valeurs singulières, inversible d'après la question i). Ainsi, en inversant cette relation (on utilise $U^{-1} = U^T$ et $V^{-1} = V^T$), on obtient la décomposition en valeurs singulières cherchée $A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$.

Exercice 5

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Et soit $A = U\Sigma V^T$ une décomposition en valeurs singulières (U est une matrice orthogonale de taille $m \times m$ et V une matrice orthogonale de taille $n \times n$). Montrer que les matrices U et V ne sont pas uniques en général mais que la matrice Σ est unique.

Solution :

Les $\min(m, n)$ valeurs singulières sont les racines carrées de valeurs propres de la matrice $A^T A$ de taille $n \times n$, elles sont donc uniques. Comme Σ est la matrice diagonale (de taille $m \times n$) des valeurs singulières ordonnées par ordre décroissant, cette matrice est unique.

Les matrices U et V ne sont pas uniques. En effet, on peut toujours multiplier U et V par -1 :

$$A = (-U)\Sigma(-V)^T,$$

ce qui donne une autre décomposition.

Exercice 6

Trouver la décomposition SVD de la matrice suivante

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

Solution : Les valeurs singulières de A sont $\sqrt{360} = 6\sqrt{10}$, $\sqrt{90} = 3\sqrt{10}$ et 0. Donc la matrice Σ est donnée par :

$$\begin{bmatrix} 6\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs propres associés sont chacune des valeurs propres de $A.A^T$ sont

$$v_1 := \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \quad v_2 := \begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \quad v_3 := \begin{bmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

donc la matrice V est donnée par

$$\begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Enfin, pour connaître la matrice U , on calcule $A.v_1$ et $A.v_2$, puis on divise par les valeurs singulières. On obtient donc U égal à

$$\begin{bmatrix} 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

On vérifie moins aisément cette fois que $A = U.\Sigma.V^T$.

Partiellement en classe mardi

Exercice 7

Calculer les valeurs singulières de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 8

Calculer les valeurs singulières de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ensuite en calculer une décomposition en valeurs singulières.

Solution :

La matrice A est 2×4 , donc elle a 4 valeurs singulières. 2 d'entre eux sont sûrement nuls, les deux autres sont les mêmes que ceux de A^T . On peut calculer ces derniers en calculant les valeurs propres de AA^T qui est une matrice 2×2 , ce qui est plus rapide que de calculer ceux de $A^T A$:

$$AA^T = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & 1 \\ 1 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (7 - \lambda)(5 - \lambda)$$

Donc les valeurs singulières de A^T sont $\sqrt{7}$ et $\sqrt{5}$ et ceux de A sont $\sqrt{7}$, $\sqrt{5}$, 0 et 0.

Si $A = U\Sigma V^T$ est une décomposition SVD de A , alors $A^T = V\Sigma^T U^T$ est une décomposition en valeurs singulières de $B = A^T$ et viceversa. On va plutôt calculer cette dernière

Calculer une orthodiagonalisation de $B^T B$, $B^T B = UDU^T$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

On cherche une base de $\ker(B^T B - 7I)$ ainsi que de $\ker(B^T B - 5I)$ et on trouve, qu'il faut encore normaliser et mettre dans U :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ normalisés dans } U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Calculer l'image de u_1 et u_2 (les colonnes de U par rapport à $B = A^T$, ainsi que les normaliser

$$Bu_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } Bu_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ -2/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ dont les normes sont } \sqrt{7} \text{ et } \sqrt{5}$$

Ces vecteurs, une fois normalisés, seront les premières deux colonnes de V :

$$V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} & 1/\sqrt{10} & \cdot & \cdot \\ 3/\sqrt{14} & 1/\sqrt{10} & \cdot & \cdot \\ 2/\sqrt{14} & -2/\sqrt{10} & \cdot & \cdot \\ 0 & 2/\sqrt{10} & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Il faut trouver les deux dernières colonnes de V en complétant en base orthonormée. On applique l'algorithme de Gram-Schmidt aux vecteurs v_1, v_2, e_1, e_2 , où ces derniers sont les premiers deux vecteurs de base canoniques. Si on devait trouver un complément orthogonal nul, on rajouterait encore e_3 et e_4 .

$$w_3 = e_1 - v_1 \cdot e_1 v_1 - v_2 \cdot e_1 v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29/35 \\ -11/35 \\ 2/35 \\ -1/5 \end{pmatrix}$$

et

$$v_3 = \frac{1}{\|w_3\|} w_3 = \begin{pmatrix} 29/\sqrt{1015} \\ -11/\sqrt{1015} \\ 2/\sqrt{1015} \\ -7/\sqrt{1015} \end{pmatrix}$$

$$w_4 = e_2 - v_1 \cdot e_2 v_1 - v_2 \cdot e_2 v_2 - v_3 \cdot e_2 v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4/29 \\ -6/29 \\ -8/29 \end{pmatrix} \text{ et } v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4/\sqrt{116} \\ -6/\sqrt{116} \\ -8/\sqrt{116} \end{pmatrix}$$

Donc

$$V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} & 1/\sqrt{10} & 29/\sqrt{1015} & 0 \\ 3/\sqrt{14} & 1/\sqrt{10} & -11/\sqrt{1015} & 4/\sqrt{116} \\ 2/\sqrt{14} & -2/\sqrt{10} & 2/\sqrt{1015} & -6/\sqrt{116} \\ 0 & 2/\sqrt{10} & -7/\sqrt{1015} & -8/\sqrt{116} \end{pmatrix}$$

La matrice Σ a la même taille de A et est

$$\begin{pmatrix} \sqrt{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 9

Calculer une SVD de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Solution : A est 3×2 on recherche donc des matrices U 3×3 orthogonale, Σ 3×2 diagonale, et V 2×2 orthogonale telles que

$$A = U\Sigma V^T$$

Soit

$$B = A^T A = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{pmatrix}$$

Ses valeurs propres sont 0 et 18, donc les valeurs singulières de A sont 0 et $3\sqrt{2}$, donc

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On déduit que le rang de A est 1.

Une base orthonormée de vecteurs propres de B associés à 18 est donnée par

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

et une associés à 0 est

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Donc

$$V = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

On trouve les deux première colonnes de U en normalisant Av_1 et Av_2 , les autres en complétant en une base orthonormée.

$$Av_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}.$$

Par contre $Av_2 = \mathbf{0}$. Dans ce cas, ce vecteur ne peut pas être utilisé dans une base. Il faut simplement compléter u_2 en une base orthonormée de \mathbb{R}^3

Méthode 1 : Gram-Schmidt avec u_1, e_1, e_2 (et éventuellement e_3).

Méthode 2 : Chercher une base orthonormée du noyau de la matrice $C = (u_1^T)$.

Méthode 3 : Chercher une base orthonormée du noyau de la matrice AA^T .

Les trois méthodes sont à peu près équivalentes. On va montrer la troisième.

$$AA^T = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -4 & 8 & -8 \\ 4 & -8 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc une base est } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Il faut orthogonaliser :

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-4}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18/5 \\ -4/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi que normaliser :

$$u_2 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } u_3 = \begin{pmatrix} -18/\sqrt{365} \\ -4/\sqrt{365} \\ 1/\sqrt{365} \end{pmatrix}. \text{ Donc } U = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/\sqrt{5} & -18/\sqrt{365} \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{365} \\ -2/3 & 0 & 1/\sqrt{365} \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que $A = U\Sigma V^T$

Exercice 10

Calculer une SVD de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solution : A est 2×2 on recherche donc des matrices U 2×2 orthogonale, Σ 2×2 diagonale, et V 2×2 orthogonale telles que

$$A = U\Sigma V^T$$

Soit

$$B = A^T A = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ses valeurs propres sont 9 et 1, donc les valeurs singulières de A sont 3 et 1, donc

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On déduit que le rang de A est 2.

Une base orthonormée de vecteurs propres de B associés à 9 est donnée par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et une associés à 1 est

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve les deux première colonnes de U en normalisant Av_1 et Av_2 , les autres en complétant en un base orthonormée.

$$Av_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } Av_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = u_1$$

On a déjà une base orthonormale de \mathbb{R}^2 . Ainsi

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que

$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 11

Soit A une matrice et soient $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ deux vecteurs propres de la matrice $A^T A$, tels que

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Utiliser ces informations afin de trouver des matrices U, Σ et V telles que A possède une décomposition en valeurs singulières de la forme

$$A = U\Sigma V^T.$$

Démarche proposée (à lire si vous êtes en difficulté) :

- d'abord déduisez le tailles des matrices A, U, Σ et V ;
- normalisez les vecteurs \mathbf{w}_1 et \mathbf{w}_2 , on obtient \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 ;
- calculez $A\mathbf{v}_1$ et $A\mathbf{v}_2$;
- calculez les valeurs singulières et définissez Σ ;
- complétez \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 en une base de \mathbb{R}^4 et assurez vous d'obtenir une base orthonormée en utilisant la méthode de Gram-Schmidt ;
- définissez V en utilisant $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$;
- normalisez $A\mathbf{v}_1$ et $A\mathbf{v}_2$ et utilisez-les pour définir U .

Solution : On remarque d'abord que, vu que $\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^4$ pour $i = 1, 2$ et le produit matriciel $A\mathbf{w}_i$ est bien défini, A possède 4 colonnes. En outre, vu que $A\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^2$ pour $i = 1, 2$, on voit que A possède 2 lignes. Par conséquent, $A \in \mathbb{M}_{2 \times 4}(\mathbb{R})$, ce qui implique que $\Sigma \in \mathbb{M}_{2 \times 4}(\mathbb{R})$, $U \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ et $V \in \mathbb{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$.

On calcule d'abord la matrice $\Sigma \in \mathbb{M}_{2 \times 4}(\mathbb{R})$. On remarque que $\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 = 0$, et que $\|\mathbf{w}_1\| = \sqrt{2}$, $\|\mathbf{w}_2\| = \sqrt{3}$. Comme $\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^4$ pour $i = 1, 2$ ne sont pas des vecteur propres normalisés de $A^T A$, on définit d'abord

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On conclut que $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^4$ pour $i = 1, 2$ sont des vecteur propres normalisés de $A^T A$. En plus,

$$\begin{aligned} \|A\mathbf{v}_1\| &= \left\| \frac{A\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \|A\mathbf{w}_1\| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, \\ \|A\mathbf{v}_2\| &= \left\| \frac{A\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} \right\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \|A\mathbf{w}_2\| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

En conséquence, A possède les valeur singulières, $\sigma_1 = \sqrt{5}/\sqrt{2}$ et $\sigma_2 = \sqrt{5}/\sqrt{3}$, avec $\sigma_1 > \sigma_2$, et donc

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5}/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5}/\sqrt{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On va calculer maintenant la matrice orthogonale $V \in \mathbb{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$. On sait que les deux premières colonnes de V sont les vecteurs propres \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 normalisés de $A^T A$. Par ailleurs, comme les deux dernières colonnes de Σ sont nulles, le produit ΣV^T dans la décomposition en valeurs singulières $A = U\Sigma V^T$ de A est indépendant des valeurs précises de deux dernières colonnes de V . En conséquence, il suffit de compléter \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 en une base orthonormée $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ est une base orthonormée de \mathbb{R}^4 et définir

$$V = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3 \ \mathbf{v}_4].$$

Pour le faire, on calcule d'abord une base du complément orthogonale $\text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}^\perp = \text{Vect}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}^\perp$, qui est donc donné par le noyau de la matrice

$$[\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2]^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dont la forme échelonnée réduite est obtenue de

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

En conséquence,

$$\begin{aligned} \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} &= \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 = x_2 = -x_3/2 \right\} \\ &= \left\{ x_3 \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned}$$

ce qui nous donne la base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

de $\text{Vect} \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}^\perp$. Si l'on normalise la base précédente on trouve une base orthonormée $\{\text{Vect } \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ de $\text{Vect} \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}^\perp$ donnée par

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On conclut que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ est une base orthonormée de \mathbb{R}^4 . On définit donc la matrice orthogonale

$$V = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3 \ \mathbf{v}_4] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On va finalement calculer la matrice orthogonale $U = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2] \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Pour le faire on utilise les identités

$$\mathbf{u}_i = \frac{A\mathbf{v}_i}{\sigma_i}$$

pour $i = 1, 2$, vu que $\sigma_1 \geq \sigma_2 > 0$. On trouve ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \frac{A\mathbf{v}_1}{\sigma_1} = \frac{A\mathbf{w}_1}{\sigma_1 \|\mathbf{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{u}_2 &= \frac{A\mathbf{v}_2}{\sigma_2} = \frac{A\mathbf{w}_2}{\sigma_2 \|\mathbf{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En conséquence,

$$U = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2] = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

En conclusion, on a

$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{5}{3}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Exercice 12

Parmi les affirmation suivantes, lesquelles sont toujours vraies ?

1. Soit A une matrice. Alors AA^T et $A^T A$ ont les mêmes valeurs singulières.
2. Une matrice A de taille $n \times n$ est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur singulière de A .
3. Soit A une matrice carrée. Alors toutes les valeurs propres de A sont aussi des valeurs singulières de A .
4. Soit A une matrice et soit $A = U\Sigma V^T$ une SVD de A . Alors $V\Sigma U^T$ est une SVD de A^T .
5. Soit A une matrice de taille 3×3 avec valeurs singulières 1, 3 et 5. Alors le déterminant de A est 15.

Solution :

1. *Faux. Il faut déjà remarquer qu'on ne parle pas ici des valeurs singulières de A . Ensuite, si A est $m \times n$, alors AA^T est $m \times m$ et elle possède m valeurs singulières et $A^T A$ est $n \times n$ avec n valeurs singulières. Donc elles peuvent pas être les mêmes. Par contre, elles ont les mêmes valeurs singulière non-nulles.*
2. *Vrai. Si A est carrées, alors les valeurs singulières sont les modules des valeurs propres de A dans l'ordre décroissants. On sait que A est inversible ssi zéro n'est pas valeur propres de A et, donc, ssi zéro n'est pas valeur singulière de A .*
3. *Faux. Si A est carrées, alors les valeurs singulières sont les modules des valeurs propres de A dans l'ordre décroissants.*
4. *Faux. $A^T = (U\Sigma V^T)^T = V\Sigma^T U^T$. Si A est $m \times n$, alors Σ aussi et Σ^T est $n \times m$. Donc $\Sigma^T \neq \Sigma$ dans le cas où A n'est pas carrée.*
5. *Faux. Par exemple, la matrice diagonale D avec $-1, 3, 5$ sur la diagonale a déterminant égale à -15 et valeurs singulières 1, 3 et 5.*

Partiellement en classe jeudi (ancien examen)

Ces exercices seront fait en classe mardi et jeudi : la première heure vous travaillerez seuls, la deuxième heure je fais passer en revue les exercices.

La factorisation LU (exercice 4), n'est pas au programme en 2023. Vous pouvez à la place essayer de calculer la factorisation QR de la matrice.

Exercice 13

Pour quels nombres réels b est-il vrai que le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 2b & 6 & 4 \\ 0 & b-1 & 1 \\ -b & 2b-5 & 5 \end{pmatrix}$$

est égal à 0 ?

- 0 et 1
- aucun
- 0 et -1
- -1 et 1

Exercice 14

On considère l'espace vectoriel formé par les matrices de taille 3×3 de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix}$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Soit h un paramètre réel. Alors les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ h & 0 & 1 \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ 4 & 0 & h \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3h \\ 0 & 4h & 0 \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendantes

- si et seulement si $h \neq 2, h \neq -2, h \neq 1/3$ et $h \neq 1/2$.
- si et seulement si $h \neq 1/2$ et $h \neq 1/3$.
- pour toute valeur réelle de h .
- si et seulement si $h \neq 2$ et $h \neq -2$.

Exercice 15

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $B = A^{-1}$, alors l'élément b_{12} de B est égal à

- $-\frac{2}{3}$.
- $\frac{1}{9}$.
- $-\frac{1}{9}$.
- $\frac{1}{3}$.

Exercice 16

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Si $A = LU$ est une factorisation LU de A (L est une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont égaux à 1 et U est une matrice triangulaire supérieure), alors l'élément l_{32} de L est

- 1/2.
- 3/2.
- 3/2.
- 3.

Exercice 17

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors la solution au sens des moindres carrés

$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}$ de l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ satisfait

- $\hat{x}_2 = -35/6$.
- $\hat{x}_2 = 41/6$.
- $\hat{x}_2 = -5/6$.
- $\hat{x}_2 = 1/6$.

Exercice 18

La dimension du sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 donné par

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \in \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ tels que } v_4 = 0 \right\}$$

est

- 4.
- 3.
- 1.
- 2.

Exercice 19

Soit $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_3$ l'application linéaire définie par $T(p(t)) = (t+1)p(t)$. Alors la matrice de T dans les bases $\{1, t, t^2\}$ de \mathbb{P}_2 et $\{1, t, t^2, t^3\}$ de \mathbb{P}_3 est

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 20

Soient l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire euclidien et le sous-espace vectoriel

$$V = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Alors, la projection orthogonale du vecteur $\begin{pmatrix} 6 \\ 21 \\ 3 \end{pmatrix}$ sur V est

- $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}.$
- $\begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ 11 \end{pmatrix}.$
- $\begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ -5 \end{pmatrix}.$
- $\frac{1}{26} \begin{pmatrix} 255 \\ 396 \\ 375 \end{pmatrix}.$

Exercice 21

Soit un paramètre $b \in \mathbb{R}$. Alors le polynôme $q(t) = bt - t^2$ appartient au sous-espace vectoriel de \mathbb{P}_2 engendré par $p_1(t) = 1 + t + t^2$ et $p_2(t) = 2 - t + 3t^2$ lorsque

- $b = 1.$
- $b = -1.$
- $b = -3.$
- $b = 3.$

Exercice 22

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -5 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ h^3 - h \\ h^3 - 4h + 4 \end{pmatrix}$$

où $h \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Alors l'équation matricielle

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

possède une infinité de solutions

- pour $h = -2, h = 0$ et $h = 2.$
- pour $h = -2, h = 1$ et $h = 2.$
- pour $h = -1, h = 0$ et $h = 1.$
- pour $h = -1, h = -1/2$ et $h = 1/2.$

Exercice 23

Soit A une matrice de taille 4×5 telle que l'équation matricielle $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ possède exactement deux variables libres. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel

$$W = \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ est compatible}\} ?$$

- 0
- 1
- 2
- 3

Exercice 24

Soient

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

- $\dim(\text{Ker } A) = 2$ et $\dim(\text{Ker } B) = 2$.
- $\dim(\text{Ker } A) \neq 2$ et $\dim(\text{Ker } B) \neq 2$.
- $\dim(\text{Ker } A) \neq 2$ et $\dim(\text{Ker } B) = 2$.
- $\dim(\text{Ker } A) = 2$ et $\dim(\text{Ker } B) \neq 2$.

Exercice 25

Soit $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$T \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ x_3 + x_1 + x_4 \end{pmatrix}.$$

Alors la matrice de T dans les bases

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

est

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & -2 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 & 6 \\ 10 & -7 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7/3 & 2 \\ 2 & -3 & -8/3 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 26

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors les valeurs propres de A sont

- -2 et 3 .
- 3 et 4 .
- -5 , -1 et 1 .
- -2 et 7 .

Exercice 27

Quel énoncé est vrai pour toute matrice A de taille $n \times n$ et tout vecteur $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$?

- L'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a au plus une solution.
- L'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a au moins une solution.
- L'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a au plus une solution au sens des moindres carrés.
- L'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a au moins une solution au sens des moindres carrés.

Exercice 28

Soit $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_4\}$ la base canonique de \mathbb{R}^4 . Soit $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{P}_4$ une application linéaire. Si le rang de T est égal à 4, alors l'ensemble $\{T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2), T(2\mathbf{e}_2), T(\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4), T(\mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_1)\}$

- est une base de \mathbb{P}_4 .
- n'est pas linéairement indépendante.
- ne peut pas être complétée en une base de \mathbb{P}_4 .
- peut être complétée en une base de \mathbb{P}_4 .

Exercice 29

Soient A et B deux matrices diagonalisables de taille $n \times n$ telles que $A \neq B$. Alors

- AB est toujours diagonalisable.
- AB n'est jamais diagonalisable.
- AB est diagonalisable si A et B ont les mêmes valeurs propres.
- AB est diagonalisable si A et B ont les mêmes vecteurs propres.

Exercice 30

Soient $m \geq 2$, A une matrice de taille $m \times (m - 1)$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ un vecteur non nul. Alors l'ensemble des solutions de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ peut être

- l'ensemble vide.
- un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^{m-1} de dimension 1.
- un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^{m-1} de dimension $m - 2$.
- égal à \mathbb{R}^{m-1} .

Exercice 31

Parmi les formules suivantes laquelle est toujours vraie pour tout choix de deux matrices inversibles A et B de taille $n \times n$?

- $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
- $(A + B^T)^{-1} = A^{-1} + (B^{-1})^T$
- $(2A)^{-1} = 2^{-n}A^{-1}$
- $(AB^T)^{-1} = (B^{-1})^T A^{-1}$

Exercice 32

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$. Parmi les affirmations

- (a) $\det A = 1$ (b) $AA^T = I_3$ (c) $A^3 = I_3$

lesquelles sont vraies ?

- seulement (a) et (c)
- seulement (b)
- seulement (a) et (b)
- (a), (b) et (c)

Exercice 33

Soient a, b deux nombres réels tels que $a + b = 1$ et $A = \begin{pmatrix} 4a & 2 \\ 2 & 4b \end{pmatrix}$ une matrice non inversible. Laquelle des affirmations suivantes doit être vraie ?

- le polynôme caractéristique de A a une seule racine réelle
- $\det A = -4$
- A est une matrice de changement de base
- le polynôme caractéristique de A a deux racines réelles distinctes

Exercice 34

Soit U une matrice de taille $n \times p$ dont les colonnes sont orthonormées et soit $W = \text{Col}(U)$. Soit proj_W la projection orthogonale sur W . Alors, pour tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ et tout vecteur $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, on a

- $U^T U \mathbf{x} = \mathbf{x}$ et $U U^T \mathbf{y} = \mathbf{0}$.
- $U^T U \mathbf{x} = \text{proj}_W \mathbf{x}$ et $U U^T \mathbf{y} = \text{proj}_W \mathbf{y}$.
- $U^T U \mathbf{x} = \mathbf{x}$ et $U U^T \mathbf{y} = \mathbf{y}$.
- $U^T U \mathbf{x} = \mathbf{x}$ et $U U^T \mathbf{y} = \text{proj}_W \mathbf{y}$.

Exercice 35

Soient les sous-ensembles de \mathbb{R}^2 suivants :

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a^2 \end{pmatrix} \text{ tels que } a \in \mathbb{R} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ \sin a \end{pmatrix} \text{ tels que } a \in \mathbb{R} \right\}$

(e) $\left\{ \begin{pmatrix} -a/2 \\ -10a \end{pmatrix} \text{ tels que } a \in \mathbb{R} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \text{ tels que } a \in \mathbb{R} \right\}$

Lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

- tous sauf (d)
- tous sauf (b)
- seulement (c) et (e)
- seulement (a), (c) et (e)

Exercice 36

Soient A et B deux matrices de taille $n \times n$ semblables. Quel énoncé n'est pas nécessairement vrai ?

- Les polynômes caractéristiques de A et de B sont les mêmes.
- A est diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable.
- Les rangs de A et de B sont les mêmes.
- A et B ont les mêmes sous-espaces propres.

Copyright 2012 © Prof. Assyr Abdulle, Prof. Simone Deparis, Dr. Christian Urech.
Informations générales, séries et corrigés : cf.

<http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414>

Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.