

Série 13 (Corrigé)

Exercice 1

On suppose que A est une matrice symétrique réelle de taille $n \times n$.

- a) Montrer qu'il existe une base orthonormale $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ de \mathbb{R}^n et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (pas forcément distincts) tels que

$$A = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T + \dots + \lambda_n \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T. \quad (1)$$

Cette expression est appelée décomposition spectrale de A .

Solution : Méthode 1 : On applique le théorème spectral à la matrice symétrique réelle A . Il existe une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale D telles que

$$A = QDQ^T.$$

On note $Q = (\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n)$ les colonnes de Q , et on pose $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Comme

Q est une matrice orthogonale, $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ est une base orthonormale. De plus,

$$\begin{aligned} A &= QDQ^T = (\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbf{u}_1^T \\ \vdots \\ \lambda_n \mathbf{u}_n^T \end{pmatrix} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \dots + \lambda_n \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T. \end{aligned}$$

Méthode 2 : Soit $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ une base orthonormale de \mathbb{R}^n donnée par le théorème spectral appliqué à A , c-à-d vérifiant $A\mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k$ pour tout k , où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A . Pour montrer que deux matrices sont égales, il suffit de montrer que leurs produits avec tout vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ coïncident. Comme $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ est une base, tout vecteur \mathbf{v} se décompose sous la forme $\mathbf{v} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{u}_k$. On calcule

$$A\mathbf{v} = \sum_{k=1}^n \alpha_k A\mathbf{u}_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k \mathbf{u}_k$$

et

$$\left(\sum_{l=1}^n \lambda_l \mathbf{u}_l \mathbf{u}_l^T \right) \mathbf{v} = \left(\sum_{l=1}^n \lambda_l \mathbf{u}_l \mathbf{u}_l^T \right) \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{u}_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \sum_{l=1}^n \lambda_l \mathbf{u}_l \mathbf{u}_l^T \mathbf{u}_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k \mathbf{u}_k,$$

où l'on a utilisé $\mathbf{u}_l^T \mathbf{u}_k = \mathbf{u}_l \cdot \mathbf{u}_k = 0$ pour $l \neq k$ et $\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k = 1$. On obtient ainsi l'égalité des deux matrices A et $\left(\sum_{l=1}^n \lambda_l \mathbf{u}_l \mathbf{u}_l^T \right)$.

b) Calculer la décomposition spectrale et vérifier l'égalité (1) pour

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ii) } A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solution :

i) *Les calculs ont déjà été effectués à l'exercice précédent (4,b). Il faut en effet calculer les valeurs propres et une base orthonormale de vecteurs propres. On obtient*

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1, \\ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie explicitement l'égalité donnée par la décomposition spectrale :

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T + \lambda_3 \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_3^T \\ &= -1 \cdot \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\ & \quad + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A. \end{aligned}$$

ii) *On procède comme en i) et on obtient*

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 10, \\ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1/(3\sqrt{2}) \\ -1/(3\sqrt{2}) \\ 4/(3\sqrt{2}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

On vérifie également explicitement que

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T + \lambda_3 \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_3^T = A.$$

Exercice 2

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.

a) Montrer que $\mathbf{Av} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{Au}$ pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Solution : En effet, $\mathbf{Av} \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{Av})^T \mathbf{u} = \mathbf{v}^T \mathbf{A}^T \mathbf{u} = \mathbf{v}^T \mathbf{Au} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{Au}$.

b) Donner un contre-exemple à a) pour une matrice carrée quelconque, en trouvant une matrice B de taille 2×2 telle que $B\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \neq \mathbf{v} \cdot B\mathbf{u}$ en général.

Solution : Par exemple, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $B\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \neq \mathbf{v} \cdot B\mathbf{u}$ pour $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Diagonaliser les matrices suivantes sous la forme $Q^T A Q = D$, avec Q une matrice orthogonale.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

Solution : A est une matrice symétrique réelle, elle est donc diagonalisable en base orthonormale d'après le théorème spectral. On trouve

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution : De même, A est une matrice symétrique réelle, elle est donc diagonalisable en base orthonormale d'après le théorème spectral. On trouve

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

(a) Soient A et B deux matrices de taille $n \times n$ qui sont orthodiagonalisables. Montrer que si $AB = BA$, alors AB est aussi orthodiagonalisable.

(b) Donner un exemple de deux matrices A et B de taille $n \times n$ qui sont orthodiagonalisables tel que AB n'est pas orthodiagonalisable.

Solution :

(a) On sait qu'une matrice à coefficients réels est orthodiagonalisable ssi elle est symétrique. Supposons que A et B sont orthodiagonalisables et commutent ($AB = BA$). Alors $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$. Ainsi, AB est symétrique, donc orthodiagonalisable.

- (b) Puisqu'une matrice à coefficients réels est orthodiagonalisable ssi elle est symétrique, il suffit de donner deux matrices symétriques A, B dont le produit n'est pas symétrique. Les matrices suivantes conviennent :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

- a) Montrer que si Q est une matrice orthogonale, alors Q^T est aussi une matrice orthogonale.

Solution : Par définition, une matrice orthogonale Q de taille $n \times n$ vérifie $Q^T Q = I_n$ et $Q Q^T = I_n$. Comme $Q = (Q^T)^T$, on a $Q^T (Q^T)^T = I_n$ et $(Q^T)^T Q^T = I_n$, ce qui montre que Q^T est aussi orthogonale.

- b) Montrer que si U, V sont des matrices $n \times n$ orthogonales, alors UV est aussi une matrice orthogonale.

Solution : En utilisant $V V^T = U U^T = I_n$, on a $UV (UV)^T = UV V^T U^T = U U^T = I_n$. De même, on peut vérifier que $(UV)^T UV = I_n$, donc UV est une matrice orthogonale.

- c) Soit \mathbf{u} un vecteur unitaire de \mathbb{R}^n ($\|\mathbf{u}\| = 1$). Montrer que la matrice $Q = I_n - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$ est orthogonale.

Solution : On doit montrer $Q^T Q = I_n$.

Méthode 1 : En travaillant avec des indices, on a

$$\begin{aligned} (Q^T Q)_{ij} &= \sum_{k=1}^n q_{ki} q_{kj} = \sum_{k=1}^n (\delta_{ki} - 2u_k u_i) (\delta_{kj} - 2u_k u_j) \\ &= \delta_{ij} + \sum_{k=1}^n (-\delta_{ki} 2u_k u_j - 2\delta_{kj} u_k u_i + 4u_i u_j u_k^2), \end{aligned}$$

avec $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ sinon. En utilisant $\sum_{k=1}^n u_k^2 = 1$, on obtient $Q^T Q = I_n$.

Méthode 2 : On calcule matriciellement : $Q^T = (I_n - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T)^T = I_n - 2(\mathbf{u}^T)^T \mathbf{u}^T = Q$, ensuite,

$$Q^T Q = (I_n - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T)(I_n - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T) = I_n - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T + 4\mathbf{u}(\mathbf{u}^T \mathbf{u})\mathbf{u}^T = I_n - 4\mathbf{u}\mathbf{u}^T + 4\mathbf{u}\mathbf{u}^T = I_n,$$

où l'on a utilisé $\mathbf{u}^T \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2 = 1$.

Remarque : de telles matrices orthogonales s'appellent réflexions de Householder.

- d) Montrer que toute valeur propre réelle λ d'une matrice orthogonale Q vérifie $\lambda = \pm 1$.

Solution : La matrice orthogonale conserve la norme de tout vecteur \mathbf{x} : $\|Q\mathbf{x}\|^2 = (Q\mathbf{x})^T (Q\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q^T Q \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$. Ensuite, si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ est un vecteur propre associé à λ , on a $\|\mathbf{x}\| = \|Q\mathbf{x}\| = \|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$. Comme $\|\mathbf{x}\| \neq 0$, on obtient $|\lambda| = 1$, ainsi $\lambda = \pm 1$.

- e) Soit Q une matrice orthogonale de taille $n \times n$. Soit $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ une base orthogonale de \mathbb{R}^n . Montrer que $\{Q\mathbf{u}_1, \dots, Q\mathbf{u}_n\}$ est aussi une base orthogonale de \mathbb{R}^n .

Solution : On calcule pour tous i, j :

$$Q\mathbf{u}_i \cdot Q\mathbf{u}_j = (Q\mathbf{u}_i)^T Q\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_i^T Q^T Q \mathbf{u}_j = \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j.$$

Comme les \mathbf{u}_i sont orthogonaux entre eux, ceci montre que la famille $\{Q\mathbf{u}_1, \dots, Q\mathbf{u}_n\}$ est orthogonale et constituée de vecteurs non nuls (de normes $\|Q\mathbf{u}_i\| = \|\mathbf{u}_i\|$).

Il reste à montrer que $\{Q\mathbf{u}_1, \dots, Q\mathbf{u}_n\}$ est une base.

Méthode 1 : Comme Q est inversible (d'inverse Q^T), Q transforme les bases en bases, donc $\{Q\mathbf{u}_1, \dots, Q\mathbf{u}_n\}$ est une base.

Méthode 2 : Comme la famille $\{Q\mathbf{u}_1, \dots, Q\mathbf{u}_n\}$ est orthogonale et constituée de vecteurs non nuls, elle est automatiquement linéairement indépendante. Comme elle comporte n vecteurs, c'est une base de \mathbb{R}^n .

Remarque : si $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ est une base orthonormée, alors $\|Q\mathbf{u}_i\| = 1$, et $\{Q\mathbf{u}_1, \dots, Q\mathbf{u}_n\}$ est aussi une base orthonormée.

Exercice 6

Est-ce que l'affirmation suivante est vraie ou fausse : Soit A une matrice de dimension $m \times n$ dont les lignes sont linéairement indépendantes. Alors la matrice AA^T n'est pas inversible.

Solution : Faux. Ils nous suffit de trouver un contre-exemple. Soit A une matrice de taille 3×2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$AA^T = \begin{pmatrix} 14 & 11 \\ 11 & 14 \end{pmatrix}$$

qui est inversible.

En général on peut montrer que cette expression est toujours fausse, c-à-d AA^T est toujours inversible si A a m lignes linéairement indépendantes.

Méthode 1 Soit $A = U\Sigma V^T$ la décomposition à valeurs singulières de A et

$$A^T = (U\Sigma V^T)^T = (V^T)^T \Sigma^T U^T = V \Sigma^T U^T$$

sa transposée, où Σ est une matrice de taille $m \times n$ avec m valeurs singulières $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ non nuls car les m lignes de A sont linéairement indépendantes ($m \leq n$). Donc

$$AA^T = U\Sigma V^T V \Sigma^T U^T = U\Sigma \Sigma^T U^T,$$

où nous avons utilisé le fait que V est une matrice orthogonale, c-à-d $VV^T = I$. On peut remarquer que $\Sigma \Sigma^T$ est une matrice diagonale de taille $m \times m$. Les éléments diagonaux sont les carrés des valeurs singulières de Σ . Etant $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_m^2$ tous non nuls, AA^T est inversible.

Méthode 2 Si les m lignes de A sont linéairement indépendantes alors $\text{rg}(A) = m$. Par le cours, on sait que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T)$. Or, par le théorème du rang, on a que $\dim(\text{Ker}(A^T)) = m - \text{rg}(A^T) = 0$. Cela implique que $\dim(\text{Ker}(AA^T)) = 0$ et, par le théorème du rang, on peut dire que $\text{rg}(AA^T) = m$, qui équivaut à dire que AA^T est inversible.

Exercice 7

Si A est une matrice symétrique inversible, alors A^{-1} est aussi une matrice symétrique.

Solution : Vrai.

Partiellement en classe

Exercice 8

Parmis les affirmations suivantes, lesquelles sont toujours vraies ?

1. Une matrice diagonalisable est symétrique.
2. Soit A une matrice $n \times n$ telle que $A^T = A$ et soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ tels que $Au = 3u$ et $Av = 4v$ alors $u \cdot v = 0$.
3. Une matrice orthogonale est orthodiagonalisable.
4. Soit A une matrice. Alors, AA^T est diagonalisable.
5. Si A est une matrice orthodiagonalisable inversible, alors A^{-1} est aussi orthodiagonalisable.
6. Soit A une matrice symétrique et B une matrice inversible telle que $B^{-1}AB$ est diagonale. Alors B est orthogonale.

Exercice 9

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale D telle que $A = QDQ^T$.

Exercice 10

Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{pmatrix}$. Si $A = PDP^T$ pour une matrice diagonale D , alors P peut s'écrire comme

A. $P = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix}$

B. $P = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$

C. $P = \begin{pmatrix} 5/13 & 12/13 \\ 12/13 & -5/13 \end{pmatrix}$

D. $P = \begin{pmatrix} 12/13 & 5/13 \\ 5/13 & -12/13 \end{pmatrix}$

Exercice 11

Calculer la décomposition spectrale de la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 12

Parmis les affirmations suivantes, lesquelles sont toujours vraies ?

1. Soit A une matrice $n \times m$. Alors $A^T A$ est inversible si et seulement si les colonnes de A sont linéairement indépendantes.
2. Une matrice A est symétrique si et seulement si A^2 est symétrique.

Copyright 2012 © Prof. Assyr Abdulle, Prof. Simone Deparis, Dr. Christian Urech.
Informations générales, séries et corrigés : cf.

<http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414>

Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.