Série 13

Exercice 1

On suppose que A est une matrice symétrique réelle de taille $n \times n$.

a) Montrer qu'il existe une base orthonormale $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (pas forcément distincts) tels que

$$A = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T + \ldots + \lambda_n \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T. \tag{1}$$

Cette expression est appelée décomposition spectrale de A.

b) Calculer la décomposition spectrale et vérifier l'égalité (1) pour

i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ii) $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.

a) Montrer que $A\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot A\mathbf{u}$ pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

b) Donner un contre-exemple à a) pour une matrice carrée quelconque, en trouvant une matrice B de taille 2×2 telle que $B\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \neq \mathbf{v} \cdot B\mathbf{u}$ en général.

Exercice 3

Diagonaliser les matrices suivantes sous la forme $Q^T A Q = D$, avec Q une matrice orthogonale.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

(a) Soient A et B deux matrices de taille $n \times n$ qui sont orthodiagonalisables. Montrer que si $AB = BA$, alors AB est aussi orthodiagonalisable.

(b) Donner un exemple de deux matrices A et B de taille $n \times n$ qui sont orthodiagonalisables tel que AB n'est pas orthodiagonalisable.

Exercice 5

a) Montrer que si Q est une matrice orthogonale, alors Q^T est aussi une matrice orthogonale.

b) Montrer que si U, V sont des matrices $n \times n$ orthogonales, alors UV est aussi une matrice orthogonale.

c) Soit $\mathbf{u}$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$ ($\|\mathbf{u}\| = 1$). Montrer que la matrice $Q = I_n - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$ est orthogonale.

d) Montrer que toute valeur propre réelle λ d'une matrice orthogonale Q vérifie $\lambda = \pm 1$.

e) Soit Q une matrice orthogonale de taille $n \times n$. Soit $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n\}$ une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\{Q\mathbf{u}_1, ..., Q\mathbf{u}_n\}$ est aussi une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 6

Est-ce que l'affirmation suivante est vraie ou fausse : Soit A une matrice de dimension $m \times n$ dont les lignes sont linéairement indépendantes. Alors la matrice AA^T n'est pas inversible.

Exercice 7

Si A est une matrice symétrique inversible, alors A^{-1} est aussi une matrice symétrique.

Partiellement en classe

Exercice 8

Parmis les affirmations suivantes, lequelles sont toujours vraies ?

1. Une matrice diagonalisable est symétrique.
2. Soit A une matrice $n \times n$ telle que $A^T = A$ et soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ tels que $Au = 3u$ et $Av = 4v$ alors $u \cdot v = 0$.
3. Une matrice orthogonale est orthodiagonalisable.

4. Soit A une matrice. Alors, AA^T est diagonalisable.

5. Si A est une matrice orthodiagonalisable inversible, alors A^{-1} est aussi orthodiagonalisable.

6. Soit A une matrice symétrique et B une matrice inversible telle que $B^{-1}AB$ est diagonale. Alors B est orthogonale.

Exercice 9

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale D telle que $A = QDQ^T$.

Exercice 10

Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{pmatrix}$. Si $A = PDP^T$ pour une matrice diagonale D, alors P peut s'écrire comme

A. $P = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix}$

B. $P = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$

C. $P = \begin{pmatrix} 5/13 & 12/13 \\ 12/13 & -5/13 \end{pmatrix}$

D. $P = \begin{pmatrix} 12/13 & 5/13 \\ 5/13 & -12/13 \end{pmatrix}$

Exercice 11

Calculer la décomposition spectrale de la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 12

Parmis les affirmations suivantes, lequelles sont toujours vraies ?

1. Soit A une matrice $n \times m$. Alors A^TA est inversible si et seulement si les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

2. Une matrice A est symétrique si et seulement si A^2 est symétrique.

Informations générales, séries et corrigés : cf.
`http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414`

Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications.* De Boeck, Bruxelles, 2005.