

## Série 12 (Corrigé)

### Exercice 1

Soient les vecteurs

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Trouver la meilleure approximation de  $\mathbf{v}$  par un vecteur de la forme  $\alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2$ .

**Solution :** Soit  $W = \text{Span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ . La meilleure approximation  $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2$  de  $\mathbf{v}$  correspond à la projection orthogonale  $\mathbf{p}_W(\mathbf{v})$ . **Attention**, ici  $\mathbf{w}_1$  et  $\mathbf{w}_2$  ne sont pas orthogonaux ( $\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 \neq 0$ ).

**Méthode 1 :** La projection orthogonale est déterminée par  $\mathbf{w} \in W$  et  $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in W^\perp$  :

$$\begin{cases} (\mathbf{w} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}_1 = 0 \\ (\mathbf{w} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_1 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1 \\ \alpha\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 + \beta\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\alpha + 6\beta = 4 \\ 6\alpha + 6\beta = 5 \end{cases}.$$

La solution est  $\alpha = -1/2$ ,  $\beta = 4/3$ . Par conséquent,  $\mathbf{w} = -\frac{1}{2}\mathbf{w}_1 + \frac{4}{3}\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$ .

**Méthode 2 :** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ . On doit trouver la meilleure approximation de  $\mathbf{v}$  sous la forme  $A\mathbf{x}$ , où  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ . L'équation normale pour la solution au sens des moindres carrés de  $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$  est

$$A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\alpha + 6\beta = 4 \\ 6\alpha + 6\beta = 5 \end{cases}.$$

On conclut comme dans la méthode 1.

**Méthode 3 :** On applique la méthode de Gram-Schmidt pour orthogonaliser la famille

$\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ . On pose  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{w}_2 - \frac{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ . La famille

$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  forme alors une base orthogonale de  $W$ . On a ainsi  $\mathbf{p}_W(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 +$

$\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2} \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$ . Puisque  $\mathbf{w}_1$  et  $\mathbf{w}_2$  ne sont pas orthogonaux, cette méthode ne

permet pas directement de trouver les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ , il faut résoudre le système supplémentaire  $A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \mathbf{p}_W(\mathbf{v})$ . On retrouve le même résultat.

b) Calculer la distance entre  $\mathbf{v}$  et  $\text{Span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ .

$$\mathbf{Solution} : \|\mathbf{v} - \mathbf{p}_W(\mathbf{v})\| = \left\| \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \right\| = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Soient maintenant les vecteurs

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c) Trouver la meilleure approximation de  $\mathbf{v}$  par un vecteur de la forme  $\alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2$ .

**Solution :** On pose à nouveau  $W = \text{Span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ . On remarque que les vecteurs  $\mathbf{w}_1$  et  $\mathbf{w}_2$  sont orthogonaux. On peut ainsi facilement calculer la projection orthogonale.

$$\mathbf{p}_W(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}. \text{ Puisque les vecteurs } \mathbf{w}_1 \text{ et } \mathbf{w}_2 \text{ sont ici orthogonaux, le calcul}$$

de la projection orthogonale fournit directement les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ . On trouve  $\alpha = 1/2$  et  $\beta = 0$ .

d) Calculer la distance entre  $\mathbf{v}$  et  $\text{Span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ .

$$\mathbf{Solution} : \|\mathbf{v} - \mathbf{p}_W(\mathbf{v})\| = \sqrt{\frac{35}{2}}.$$

## Exercice 2

Calculer la décomposition QR des matrices suivantes.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

**Solution :** On applique la méthode de Gram-Schmidt aux vecteurs  $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et

$$\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ puis on les normalise. On obtient } \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix},$$

$$\text{d'où } Q = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}, \text{ et } R = Q^T A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Solution} : Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 5/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{6}/3 & \sqrt{6}/3 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$$c) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{Solution} : Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22} \\ 0 & -2/\sqrt{22} \\ -1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{11/2} \end{pmatrix}.$$

### Exercice 3

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- Soit  $A$  une matrice  $n \times n$  qui peut se factoriser selon la factorisation  $QR$  comme  $A = QR$ . Alors,  $Q^T A = R$ .
- Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $\hat{\mathbf{y}}$  la projection orthogonale de  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  sur  $W$ . Alors  $\hat{\mathbf{y}}$  dépend du choix de la base de  $W$ .
- Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , tel que  $W = \text{Span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ . Si  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  satisfait  $\mathbf{z} \perp \mathbf{w}_1$  et  $\mathbf{z} \perp \mathbf{w}_2$ , alors  $\mathbf{z} \in W^\perp$ .
- Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\mathbf{y} \in W$ , alors sa projection orthogonale sur  $W$  est  $\mathbf{p}_W(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$ .

**Solution :** Vrai : a) Forcément vu que  $Q^T = Q^{-1}$ , c) Oui, suffit d'écrire un élément de  $W$  comme combinaison linéaire de  $w_1$  et  $w_2$ , d) Oui, un projecteur est l'identité quand on le restreint à l'espace en question. Faux : b) Il ne dépend que de  $W$ .

### Exercice 4

Soit  $V$  une espace euclidien. On note  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  le produit scalaire de deux vecteurs  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  et la norme associée est  $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$ .

Montrer :

- Si  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  est une famille orthonormale, alors  $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{2}$ .

**Solution :**  $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \langle (\mathbf{u} - \mathbf{v}), (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2 = 1 - 0 + 1 = 2$ , donc  $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{2}$ .

- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{4} (\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2)$  pour tous  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ .

**Solution :**  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \langle (\mathbf{u} + \mathbf{v}), (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \rangle - \langle (\mathbf{u} - \mathbf{v}), (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ .

c)  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2)$  pour tous  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ .

**Solution :**  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \langle (\mathbf{u} + \mathbf{v}), (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \rangle + \langle (\mathbf{u} - \mathbf{v}), (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$ .

Remarque : l'égalité c) s'appelle "identité du parallélogramme".

### Exercice 5

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- L'ensemble des solutions au sens des moindres carrés de  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  coïncide avec l'ensemble non vide des solutions de l'équation normale  $A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$ .
- Soit  $A$  une matrice  $m \times n$  et  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Le problème général des moindres carrés consiste à trouver un  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  qui rend  $A\mathbf{x}$  aussi proche que possible de  $\mathbf{b}$ .
- Soit  $V$  un espace euclidien et soit  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  le produit scalaire de deux vecteurs  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ . Alors  $(\mathbf{u}\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v}, \mathbf{w})$  pour tous  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ .
- L'espace  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire classique est un espace euclidien.

**Solution :** Vrai : a) Revoir la définition, b) Idem, d) Idem. Faux : c) Le sens du membre de gauche de l'égalité n'est même pas clair.

### Exercice 6

Répondez par vrai ou faux, en justifiant brièvement votre réponse : Le point  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -16 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}$  est le point le plus proche de  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$  dans le sous-espace engendré par  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  et  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ .

**Solution :** Faux. On cherche  $\alpha, \beta$  solutions de :

$$\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 0 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aux sens des moindres carrés. L'équation normale donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 125 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix}$$

L'unique solution est  $(\alpha, \beta) = (-1, 0.2)$ ; donc le point le plus proche de  $\mathbf{y}$  dans le sous-espace engendré par  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  est  $\begin{pmatrix} -1.6 \\ 1.2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

## Exercices supplémentaires

### Exercice 7

Soit  $U$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  et  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$  une base orthogonale de  $U$ . On considère la transformation  $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par  $\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{p}_U(\mathbf{v})$ . Montrer que  $\mathbf{T}$  est une transformation linéaire.

**Solution : Méthode 1 :**

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) &= \frac{(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 + \dots + \frac{(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}_p}{\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_p} \mathbf{u}_p \\ &= \alpha \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 + \beta \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_p}{\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_p} \mathbf{u}_p + \beta \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_p}{\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_p} \mathbf{u}_p = \alpha \mathbf{T}(\mathbf{v}) + \beta \mathbf{T}(\mathbf{w}). \end{aligned}$$

**Méthode 2 :** En utilisant l'identité  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x}$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{v}) &= \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 + \dots + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_p}{\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_p} \mathbf{u}_p = \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T (\mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1)^{-1} \mathbf{v} + \dots + \mathbf{u}_p \mathbf{u}_p^T (\mathbf{u}_p^T \mathbf{u}_p)^{-1} \mathbf{v} \\ &= \left( \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T (\mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1)^{-1} + \dots + \mathbf{u}_p \mathbf{u}_p^T (\mathbf{u}_p^T \mathbf{u}_p)^{-1} \right) \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Ainsi, la transformation  $\mathbf{T}$  est associée à la matrice de taille  $n \times n$  définie par  $\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T (\mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1)^{-1} + \dots + \mathbf{u}_p \mathbf{u}_p^T (\mathbf{u}_p^T \mathbf{u}_p)^{-1}$  et est donc linéaire.

### Exercice 8

Les données suivantes décrivent le potentiel dans un câble électrique en fonction de la température du câble.

$i$	$T_i$ [ $^{\circ}\text{C}$ ]	$U_i$ [V]
1	0	-2
2	5	-1
3	10	0
4	15	1
5	20	2
6	25	4

On suppose que le potentiel suit la loi  $U = a + bT + cT^2$ . Calculer  $a, b, c$  au sens des moindres carrés.

**Solution :** Le système linéaire s'écrit

$$\mathbf{U} = A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

avec  $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_6 \end{pmatrix}$  et  $A$  est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & T_1 & T_1^2 \\ 1 & \vdots & \vdots \\ 1 & & \\ 1 & & \\ 1 & & \\ 1 & \vdots & \vdots \\ 1 & T_6 & T_6^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 10 & 100 \\ 1 & 15 & 225 \\ 1 & 20 & 400 \\ 1 & 25 & 625 \end{pmatrix}.$$

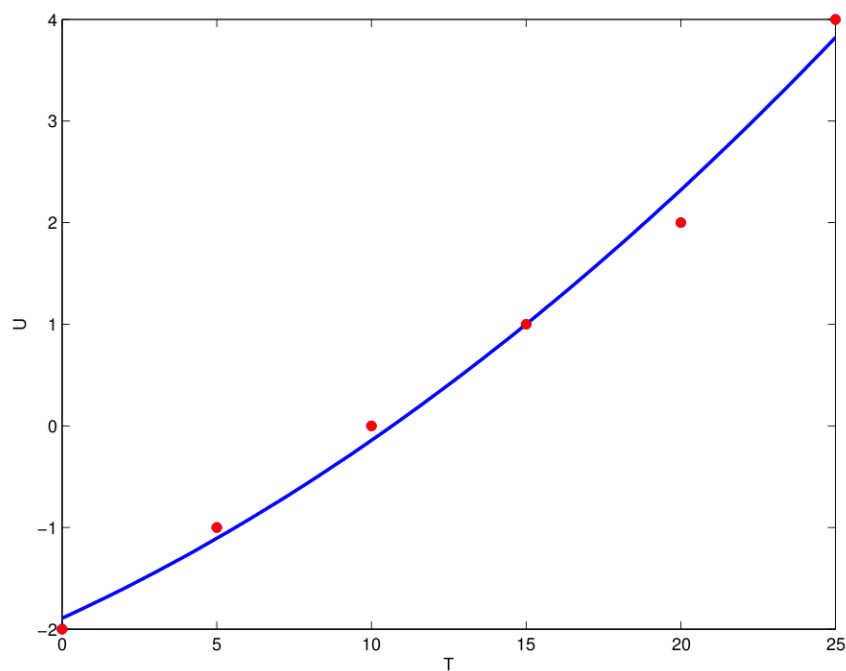
Pour résoudre ce système et trouver  $a, b, c$  au sens des moindres carrés, on considère l'équation normale

$$A^T \mathbf{U} = A^T A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

On trouve

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-53}{28} \\ \frac{39}{280} \\ \frac{1}{280} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1.89 \\ 0.139 \\ 0.00357 \end{pmatrix}.$$

Le graphique suivant montre les données (en rouge) et la courbe d'interpolation (bleue) obtenue au sens des moindres carrés.



### Exercice 9

Soit  $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^n$  deux sous-espaces vectoriels. Montrer que

(a)  $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$  ;

(b)  $W_1 = (W_1^\perp)^\perp$  ;

(c)  $W_1 \subset W_2$  implique  $W_2^\perp \subset W_1^\perp$ .

**Solution :**

(a) Soit  $\mathbf{x} \in (W_1 + W_2)^\perp$  alors

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \mathbf{0}$$

pour tous  $\mathbf{w}_1 \in W_1$  et  $\mathbf{w}_2 \in W_2$ . Si on prend  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$  alors on a que  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_2 = 0$  pour tous  $\mathbf{w}_2 \in W_2$ . Cela signifie que  $\mathbf{x} \in W_2^\perp$ . De façon similaire, on a que  $\mathbf{x} \in W_1^\perp$ . On a donc montré que

$$(W_1 + W_2)^\perp \subset W_1^\perp \cap W_2^\perp.$$

Pour montrer l'égalité, il nous suffit de montrer que si  $x \in W_1^\perp \cap W_2^\perp$  alors  $x \in (W_1 + W_2)^\perp$  aussi. En effet, pour tous  $x \in W_1^\perp \cap W_2^\perp$  on a

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_1 = \mathbf{0} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_2$$

pour tous  $\mathbf{w}_1 \in W_1$  et  $\mathbf{w}_2 \in W_2$ . Alors, par linéarité, on a

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_1 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Finalement, cela signifie que

$$W_1^\perp \cap W_2^\perp \subset (W_1 + W_2)^\perp.$$

(b) Pour tous  $\mathbf{x} \in W_1$ , par définition, on a que  $\mathbf{x}$  est orthogonal à tous les éléments dans  $W_1^\perp$ , c-à-d

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{0}$$

pour tous  $\mathbf{y}$  dans  $W_1^\perp$ . Mais cela signifie que  $\mathbf{x} \in (W_1^\perp)^\perp$ . On a donc montré que

$$W_1 \subset (W_1^\perp)^\perp.$$

De façon similaire, on peut montrer que  $(W_1^\perp)^\perp \subset W_1$ . En effet, vu que  $\dim(W_1) + \dim(W_1^\perp) = n$  et aussi  $\dim(W_1)^\perp + \dim(W_1) = n$ , on peut donc écrire

$$\dim(W_1) = \dim(W_1^\perp)^\perp.$$

Finalement,  $W_1 = (W_1^\perp)^\perp$ .

(c) Pour tous  $\mathbf{x} \in W_2^\perp$  on a que  $\mathbf{x}$  est orthogonal à tous les vecteurs de  $W_2$ , c-à-d

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_2 = \mathbf{0}$$

pour tous  $\mathbf{w}_2 \in W_2$ . Vu que  $W_1$  est un sous espace de  $W_2$ , alors  $\mathbf{x}$  est aussi orthogonal à tous les vecteurs de  $W_1$ , c-à-d

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$$

pour tous  $\mathbf{w}_1 \in W_1$ . Cela signifie que  $\mathbf{x} \in W_1^\perp$  et donc  $W_2^\perp \subset W_1^\perp$ .

### Exercice 10

i) Soit  $\{u_1, \dots, u_n\}$  une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  et  $v$  un vecteur dans  $\mathbb{R}^n$ . Montrer

$$\|v\|^2 = |v \cdot u_1|^2 + \dots + |v \cdot u_n|^2.$$

**Solution :** Soit  $U$  la matrice orthogonale formée des colonnes  $u_i$ . En utilisant  $UU^T = I$ , on obtient

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \langle v, UU^T v \rangle = \langle U^T v, U^T v \rangle = \|U^T v\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} u_1 \cdot v \\ \vdots \\ u_n \cdot v \end{pmatrix} \right\|^2 = \sum_{i=1}^n |u_i \cdot v|^2.$$

ii) (Inégalité de Bessel) Soit  $\{u_1, \dots, u_p\}$  une famille orthonormée dans  $\mathbb{R}^n$  et soit  $v$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ . Montrer

$$\|v\|^2 \geq |v \cdot u_1|^2 + \dots + |v \cdot u_p|^2.$$

**Solution :** On considère la projection  $w = \sum_{i=1}^p \langle u_i, v \rangle u_i$  de  $v$  sur  $W = \text{span}\{u_1, \dots, u_p\}$ . On a la décomposition  $v = w + z$ , avec  $z \in W^\perp$ . Par le théorème de Pythagore,  $w$  et  $z$  étant orthogonaux, on obtient

$$\|v\|^2 = \|w\|^2 + \|z\|^2.$$

(En effet, on a  $\|v\|^2 = \langle w + z, w + z \rangle = \|w\|^2 + \|z\|^2 + 2 \langle w, z \rangle$  et  $\langle w, z \rangle = 0$ ).  
Ensuite,

$$\|v\|^2 \geq \|w\|^2 = \sum_{i=1}^p \|\langle u_i, v \rangle u_i\|^2 = \sum_{i=1}^p |\langle u_i, v \rangle|^2 \|u_i\|^2 = \sum_{i=1}^p |\langle u_i, v \rangle|^2.$$

## Partiellement en classe

### Exercice 11

Soient  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Soit  $W = \text{Vect}\{u_1, u_2\}$ . Calculer la décomposition  $v = z + p_W(v)$ , où  $z \in W^\perp$ .

### Exercice 12

Soient  $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix}$  et  $W = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ .

Alors, le projeté orthogonal (par rapport au produit scalaire euclidien) de  $v$  sur  $W$  est

[A.]  $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$       [B.]  $\begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$       [C.]  $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ -14 \end{pmatrix}$       [D.]  $\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

### Exercice 13

Calculer la droite qui approxime le mieux au sens des moindres carrés les points  $(-1, 3)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 3)$ . Par où passe cette droite en  $x = -1, 1$  et  $0$ ?

### Exercice 14

Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$  et  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Alors la solution au sens des moindres carrés  $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}$  de l'équation  $Ax = b$  satisfait

[A.]  $\hat{x}_2 = 1/6$       [B.]  $\hat{x}_2 = -35/6$       [C.]  $\hat{x}_2 = 41/6$       [D.]  $\hat{x}_2 = -5/6$

### Exercice 15

Quelle affirmation est vraie pour toute matrice  $A$  de taille  $n \times n$  et tout vecteur  $b \in \mathbb{R}^n$ ?

- A. L'équation  $Ax = b$  a au plus une solution
- B. L'équation  $Ax = b$  a au plus une solution au sens des moindres carrés
- C. L'équation  $Ax = b$  a au moins une solution.
- D. L'équation  $Ax = b$  a au moins une solution au sens des moindres carrés.

### Exercice 16

Soit  $u_1, \dots, u_p$  une base orthonormée d'un sous-espace  $W \subset \mathbb{R}^n$  et  $y \in \mathbb{R}^n$  et soit  $U$  la matrice  $n \times p$  dont les colonnes sont les vecteurs  $u_1, \dots, u_p$ . Montrer que  $p_W(y) = UU^T y$ .

### Exercice 17

Soient  $A$  une matrice de taille  $m \times n$  et  $b \in \mathbb{R}^m$ . Soit  $c = \text{proj}_{\text{Col}(A)}(b)$ . Alors, il es toujours vrai que

- A. la solution au sens des moindres carrés de l'équation  $Ax = b$  est  $A^{-1}c$ .
- B. l'équation  $Ax = b$  n'admet aucune solution
- C. toute solution de  $Ax = c$  est une solution au sens des moindres carrés de  $Ax = b$
- D. l'équation  $Ax = c$  possède une solution unique.

### Exercice 18

Quelle équation correspond à la droite de régression par les points  $(0, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 2)$  ?

- A.  $y = 0.9 + 0.4x$
- B.  $y = 1 + 0.5x$
- C.  $y = 18 + 4x$
- D.  $y = 1.1 + 0.6x$

### Exercice 19

Soit  $U$  une matrice de taille  $n \times p$  dont les colonnes sont orthonormées et soit  $W = \text{Col}(U)$ . Alors, pour tout vecteur  $x \in \mathbb{R}^p$  et tout vecteur  $y \in \mathbb{R}^n$ , on a

- A.  $U^T Ux = \text{proj}_W(x)$  et  $UU^T y = \text{proj}_W(y)$
- B.  $U^T Ux = x$  et  $UU^T y = 0$
- C.  $U^T Ux = x$  et  $UU^T y = y$
- D.  $U^T Ux = x$  et  $UU^T y = \text{proj}_W(y)$ .

### Exercice 20

Soit  $A$  une matrice dont les colonnes sont linéairement indépendantes, et soit  $A = QR$  sa factorisation QR. Alors  $R$  est une matrice inversible.

- A. Vrai
- B. Faux

### Exercice 21

Calculer une factorisation QR de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

### Exercice 22

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Soit  $A = QR$  la décomposition QR de  $A$ . Alors

$$[A.] r_{33} = 2\sqrt{2} \quad [B.] r_{33} = \sqrt{2} \quad [C.] r_{33} = \sqrt{3} \quad [D.] r_{33} = 3\sqrt{2}$$

### Exercice 23

Soient  $A$  une matrice non-nulle de taille  $m \times n$  et  $b \in \mathbb{R}^m$ . Alors, il est toujours vrai que

- A. le vecteur  $b - Ax$  appartient à  $\ker(A^T)$  pour un unique choix de  $x \in \mathbb{R}^n$ .
- B. la matrice  $A^T A$  est inversible.
- C. l'équation  $Ax = b$  admet une unique solution au sens des moindres carrés.
- D. si  $\hat{x}$  et  $\hat{x}'$  sont deux solutions au sens des moindres carrés de  $Ax = b$ , alors  $A\hat{x} = A\hat{x}'$

---

Copyright 2012 © Prof. Assyr Abdulle, Prof. Simone Deparis, Dr. Christian Urech.  
Informations générales, séries et corrigés : cf.

<http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414>

Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.