Série 11 (Corrigé)

Exercice 1

a) Trouver un vecteur non nul orthogonal à $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solution : $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *car* $\mathbf{z} \cdot \mathbf{x} = 0$.

b) Soient $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}, \quad \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|}, \quad \frac{1}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}\mathbf{w}, \quad \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}.$$

Solution : $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 7$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 10$, $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{39}{\sqrt{5}}$, $\frac{1}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}\mathbf{w} = \frac{1}{61}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} = \frac{39}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Calculer la distance entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ et la distance entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{w}$.
Solution : $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{17}$, $\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| = 3$.

d) Calculer les vecteurs unitaires correspondant à $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ (pointant dans la même direction que le vecteur original).
Solution : $\tilde{\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbf{w}} = \frac{1}{\sqrt{61}}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Soient $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont orthogonaux.

b) Calculer la projection orthogonale $\mathbf{p}_W(\mathbf{v})$ de $\mathbf{v}$ sur $W = \text{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

c) Donner la décomposition $\mathbf{v} = \mathbf{z} + \mathbf{p}_W(\mathbf{v})$, où $\mathbf{z} \in W^{\perp}$.

Solution :

a) *Un calcul direct donne* $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$.

b)

$$\mathbf{p}_W(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 = \frac{6}{3}\mathbf{u}_1 + \frac{-3}{2}\mathbf{u}_2 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c) $\mathbf{v} = \mathbf{z} + \mathbf{p}_W(\mathbf{v})$, *où* $\mathbf{p}_W(\mathbf{v})$ *est calculé dans b),*

et $\mathbf{z}$ *est donné par* $\mathbf{z} = \mathbf{v} - \mathbf{p}_W(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Remarque : on peut vérifier que $\mathbf{z} \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{z} \cdot \mathbf{u}_2 = 0$, *c'est-à-dire* $\mathbf{z} \in W^{\perp}$.

Même question pour $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Solution :

a) *Les vecteurs* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ *sont orthogonaux :* $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 = 0$.

b)

$$\mathbf{p}_W(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_3}{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3}\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c) $\mathbf{z} = \mathbf{v} - \mathbf{p}_W(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Remarque : $\mathbf{v} = \mathbf{p}_W(\mathbf{v})$ *équivaut à* $\mathbf{v} \in W$.

Même question pour $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solution :

a) *Les vecteurs* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ *sont orthogonaux :* $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$.

b)

$$\mathbf{p}_W(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 = \frac{2}{7}\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 4/7 \\ 6/7 \end{pmatrix}.$$

c) $\mathbf{z} = \mathbf{v} - \mathbf{p}_W(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 5/7 \\ -4/7 \\ 1/7 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Soient $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ et $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ deux bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$. On définit les matrices de taille $n \times n$, $U = (\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n)$ et $V = (\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n)$. Montrer que $U^T U = I_n$, $V^T V = I_n$ et que UV est inversible.

Solution :

$$U^T U = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_n \\ \mathbf{u}_2^T\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2^T\mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_2^T\mathbf{u}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{u}_n^T\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_n^T\mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n^T\mathbf{u}_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

Comme $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ vérifient les mêmes hypothèses, on a également $V^T V = I_n$.
UV est inversible car $V^T U^T UV = V^T V = I_n$, d'où $(UV)^{-1} = V^T U^T$.

Exercice 4

Appliquer la méthode de Gram-Schmidt pour orthogonaliser les bases de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ suivantes.

a) $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ base d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$, avec $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solution : *La méthode de Gram-Schmidt donne* $\mathbf{u}_1 = \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{w}_2 - \frac{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}.$$

b) $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ base d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$, avec $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solution : *La méthode de Gram-Schmidt donne* $\mathbf{u}_1 = \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{w}_2 - \frac{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{w}_3 - \frac{\mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1/5 \\ 2/5 \\ -2/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}.$$

c) Donner une base orthonormale pour a) et b).

Solution : *Pour a) :* $\mathbf{u}_1/\|\mathbf{u}_1\| = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2/\|\mathbf{u}_2\| = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Pour b) : $\mathbf{u}_1/\|\mathbf{u}_1\| = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2/\|\mathbf{u}_2\| = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3/\|\mathbf{u}_3\| = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_q\}$ une base orthogonale de W. Soit $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ une base orthogonale de $W^\perp$.
Montrer que $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_q, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ est orthogonale et prouver la relation

$$\dim W + \dim W^\perp = n.$$

Solution : *Le vecteur $\mathbf{w}_i$ et le vecteur $\mathbf{v}_j$ sont orthogonaux pour tous $i = 1 \dots q,\ j = 1 \dots r$ car ils appartiennent aux espaces orthogonaux W et $W^\perp$. Les vecteurs $\mathbf{w}_i$ sont orthogonaux entre eux car ils constituent une base orthogonale, de même pour les vecteurs $\mathbf{v}_j$. Ainsi, n'importe quels deux vecteurs dans la famille $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_q, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ sont orthogonaux : c'est une famille orthogonale.*

Montrons la relation $\dim W + \dim W^\perp = n$.

Méthode 1 : *La famille $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_q, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ est orthogonale donc linéairement indépendante. De plus tout vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ se décompose sous la forme $\mathbf{v} = \mathbf{z} + \mathbf{w}$ avec $\mathbf{z} \in W^\perp$ et $\mathbf{w} = \mathbf{p}_W(\mathbf{v}) \in W$. Or $\mathbf{z} \in W^\perp$ peut être décomposé dans la base $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ de $W^\perp$ et $\mathbf{p}_W(\mathbf{v}) \in W$ peut être décomposé dans la base $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_q\}$ de W. Ainsi, tout vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ peut se décomposer selon la famille linéairement indépendante $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_q, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ qui est donc une base de $\mathbb{R}^n$. Par conséquent $q + r = n$.*

Méthode 2 : *Appliquons le théorème du rang à l'application linéaire $\mathbf{p}_W$:*

$$\dim \operatorname{Im} \mathbf{p}_W + \dim \operatorname{Ker} \mathbf{p}_W = n.$$

Or la projection vérifie $\operatorname{Ker} \mathbf{p}_W = W^\perp$ *et* $\operatorname{Im} \mathbf{p}_W = W$*, d'où le résultat.*

Exercice 6

Déterminer la solution au sens des moindres carrés de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

a) en utilisant l'équation normale lorsque

i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, *__Solution :__ L'équation normale* $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ *est* $\begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$*, elle a pour solution* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5/14 \\ 5/7 \end{pmatrix}$*.*

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

__Solution :__ $A^TA = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$, $A^T\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$;

__Solution :__ $A^TA = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $A^T\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$.

b) en utilisant la méthode QR lorsque

i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

__Solution :__ Les colonnes de la matrice A sont linéairement indépendantes, donc décomposer A selon $A = QR$ *et résoudre* $R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}$ *est équivalent à résoudre l'équation normale. La décomposition a été calculée à l'exercice 4 (question c)) et est donnée par*

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22} \\ 0 & -2/\sqrt{22} \\ -1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22} \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{11/2} \end{pmatrix}.$$

L'approximation $\mathbf{x}$ *au sens des moindres carrés est la solution du système* $R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}$*, où* $Q^T\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/\sqrt{22} \end{pmatrix}$*. Ainsi,* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1/11 \\ -2/11 \end{pmatrix}$*.*

ii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

__Solution :__ Ici de même, les colonnes de la matrice A sont linéairement indépendantes, donc décomposer A selon $A = QR$ *et résoudre* $R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}$ *est équivalent à résoudre l'équation normale. La décomposition a également été calculée à l'exercice 4 (question a)) et est donnée par*

$$Q = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On trouve $Q^T\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 11/9 \\ -2/3 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Soit A une matrice de taille $m \times n$.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}A = \mathrm{Ker}(A^TA)$.

Solution : *Si* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, *alors* $A^TA\mathbf{x} = \mathbf{0}$, *ce qui montre* $\mathrm{Ker}A \subset \mathrm{Ker}(A^TA)$. *Soit maintenant* $\mathbf{x}$ *tel que* $A^TA\mathbf{x} = \mathbf{0}$, *alors* $\mathbf{x}^TA^TA\mathbf{x} = 0$. *Or,* $\mathbf{x}^TA^TA\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^T(A\mathbf{x}) = \|A\mathbf{x}\|^2$. *Ainsi,* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, *et* $\mathrm{Ker}(A^TA) \subset \mathrm{Ker}A$. *D'où l'égalité.*

b) Montrer que A^TA est inversible si et seulement si les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

Solution : *Les colonnes de* $A = (\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n)$ *sont linéairement indépendantes*

$\iff (\beta_1\mathbf{a}_1 + \dots + \beta_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \beta_1 = \dots = \beta_n = 0)$

$$\iff \left(A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \mathbf{0} \right)$$

$\iff \mathrm{Ker}A = \{\mathbf{0}\}$.

Ainsi, d'après a), les colonnes de A *sont linéairement indépendantes si et seulement si* $\mathrm{Ker}(A^TA) = \{\mathbf{0}\}$, *c'est-à-dire la matrice (carrée)* A^TA *est inversible.*

Exercice 8

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ -13 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

La solution au sens des moindres carrés $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ du système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est telle que

$\square \hat{x}_2 = -4$

$\square \hat{x}_2 = 3$

$\square \hat{x}_2 = -3$

$\square \hat{x}_2 = 4$

Solution : *On pose l'équation normale :*

$$A^TA = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} \;;\; A^Tb = \begin{pmatrix} 9 \\ -96 \end{pmatrix}$$

On obtient $\hat{x}_2 = -4$.

Exercice 9

Soit $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donner l'ensemble W des vecteurs orthogonaux à $\mathbf{v}$. Est-ce un espace vectoriel ? Si oui, trouver une base de W. Justifier les réponses.

Solution :

*W **est un sous-espace vectoriel de** $\mathbb{R}^3$ **:** Vérification de la définition :*

i) $\mathbf{o} \in W$: $\langle \mathbf{o}, \mathbf{v} \rangle = 0$ *(en vérité, cela est vrai pour n'importe quel vector !), donc le vecteur nul est orthogonal à* $\mathbf{v}$*, c'est à dire dans* W

ii) soient $\mathbf{w}_1$ *et* $\mathbf{w}_2$ *dans* W *et* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Est-ce que* $\mathbf{w}_1 + \lambda \mathbf{w}_2$ *est dans* W*, i.e orthogonal à* $\mathbf{v}$ *? On peut répondre par linéarité du produit scalaire :*

$$\langle \mathbf{w}_1 + \lambda \mathbf{w}_2, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{v} \rangle \langle \lambda \mathbf{w}_2, \mathbf{v} \rangle = 0 + \lambda 0 = 0$$

Remarque : *ici on ne peut pas utiliser directement le résultats du cours qui dit que l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel car l'ensemble* $\{\mathbf{v}\}$ *n'est pas un sous-espace vectoriel*

*Pour trouver **une base de** W, il faut d'abord remarquer que l'ensemble des vecteurs* $\mathbf{x}$ *orthogonaux à* $\mathbf{v}$ *satifont l'équation linéaire* $\mathbf{v}^T \mathbf{x} = 0$*. En définissant* $B = \mathbf{v}^T = (3 \quad 2 \quad 1)$ *on constate donc que* $W = \ker B$*.*

Ceci nous permet entre autre de conclure que W est en sous-espace vectoriel car le noyau d'une matrice en est un. Pour trouver $\ker B$ on écrit la matrice aumentée suivante

$$(3 \quad 2 \quad 1 \mid 0)$$

et on constate qu'il y a 2 variables libre, x_1 *et* x_2*. Pour trouver une base du noyau il faut faire les deux choix* $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ *et* $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ *; une base de* W *est donc formé par les vecteurs*

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad et\ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10

Parmi les matrices suivantes, indiquer celles qui sont diagonalisables (toujours en justifiant), et le cas échéant, diagonaliser ces matrices et exhiber les vecteurs propres.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution :

- *A n'est pas diagonalisable. Ses valeurs propres sont : $-2, -2, 1$. La dimension de l'espace propre pour $\lambda = -2$ est seulement 1 alors que la multiplicité est 2.*

- *B est diagonalisable. En effet, les valeurs propres sont distinctes :*

$$2, 1, \frac{1}{2}\left(7+\sqrt{13}\right), \frac{1}{2}\left(7-\sqrt{13}\right).$$

En général, les vecteurs propres sont tels que $(B-\lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. On voit facilement que $\mathbf{v}_1 = (1\ 0\ 0\ 0)^T$ et $\mathbf{v}_2 = (0\ 1\ 0\ 0)^T$ sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. Pour trouver les vecteurs propres $\mathbf{v}_3$ et $\mathbf{v}_4$ et pour $\lambda_3 = \frac{1}{2}\left(7+\sqrt{13}\right)$ et $\lambda_4 = \frac{1}{2}\left(7-\sqrt{13}\right)$ nous devons mettre les matrices $(B-\lambda_3 I)$ et $(B-\lambda_4 I)$ sous forme échelonnée réduite. En général on a

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda-\frac{3}{4-\lambda} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{4}{2-\lambda} & \dfrac{1}{2-\lambda} \\ 0 & 1 & \dfrac{2}{1-\lambda} & \dfrac{3}{1-\lambda} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{(4-\lambda)} \\ 0 & 0 & 0 & (3-\lambda)(4-\lambda)-3 \end{pmatrix}$$

On peut voir que $(3-\lambda)(4-\lambda)-3 = 0$ pour $\lambda = \lambda_3$ et $\lambda = \lambda_4$. Il suffit de choisir la troisième composante égal à 1 et les autres composantes sont facilement dérivées :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -\dfrac{4-(4-\lambda)}{2-\lambda} \\ -\dfrac{2-3(4-\lambda)}{1-\lambda} \\ 1 \\ -(4-\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\lambda}{2-\lambda} \\ \dfrac{10-3\lambda}{1-\lambda} \\ 1 \\ -4+\lambda \end{pmatrix}.$$

Donc, on obtient

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2+\sqrt{13} \\ \dfrac{-17+7\sqrt{13}}{6} \\ 1 \\ \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -2-\sqrt{13} \\ \dfrac{-17-7\sqrt{13}}{6} \\ 1 \\ \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix}$$

Maintenant, si $\widetilde{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ et $P = (\mathbf{v}_1\, \mathbf{v}_2\, \mathbf{v}_3\, \mathbf{v}_4)$, on a $B = P\widetilde{D}P^{-1}$.

- *C est diagonalisable. Valeurs propres : $5, 5, -3, -3$.*
  Vecteurs propres associés : $\mathbf{v}_1 = (-16\ 4\ 0\ 1)^T, \mathbf{v}_2 = (-8\ 4\ 1\ 0)^T, \mathbf{v}_3 = (0\ 0\ 1\ 0)^T$, $\mathbf{v}_4 = (0\ 0\ 0\ 1)^T$.
  Remarque : les vecteurs propres $(0\ 0\ 1\ 0)^T, (0\ 0\ 0\ 1)^T$ étaient faciles à deviner.
  Maintenant, si $\widetilde{D} = \operatorname{diag}(5, 5, -3, -3)$ et $P = (\mathbf{v}_1\, \mathbf{v}_2\, \mathbf{v}_3\, \mathbf{v}_4)$, on a $C = P\widetilde{D}P^{-1}$.

- *D est diagonalisable. Valeurs propres : $5, 5, 4$.*
  Vecteurs propres associés : $\mathbf{v}_1 = (-2\ 0\ 1)^T, \mathbf{v}_2 = (0\ 1\ 0)^T, \mathbf{v}_3 = (-1\ 2\ 0)^T$.
  Remarque : le vecteur propre $(0\ 1\ 0)^T$ était facile à deviner.
  Maintenant, si $\widetilde{D} = \mathrm{diag}(5, 5, 4)$ et $P = (\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3)$, on a $D = P\widetilde{D}P^{-1}$.

- *E n'est pas diagonalisable. Valeurs propres : $0, 0$. La dimension de l'espace propre associé à $\lambda = 0$ est seulement 1.*

Exercice 11

Soient

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et A une matrice 3×3 à coefficients réels telle que :

- $\lambda_1 = 4$ est une valeur propre associé au vecteur $\mathbf{v_1}$
- $\lambda_2 = 2e^{i\pi/3}$ est une valeur propre associé au vecteur $\mathbf{v_2}$

(a) Calculer le polynôme caracteristique de A dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$. Est-ce que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$?

(b) Calculer D et P tels que $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale et P inversible.

(c) Calculez P^{-1}.

(d) *Optionnel : calculez A*

Rappel :

$$e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3} = 2\frac{e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3}}{2} = 2\cos(\pi/3) = 2\frac{1}{2} = 1$$
$$-ie^{i\pi/3} + ie^{-i\pi/3} = -i2\frac{e^{i\pi/3} - e^{-i\pi/3}}{2} = 2\sin(\pi/3) = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Solution :

Analyse du problème :

Puisque les coefficients de A sont réels, et λ_2 ne l'est pas, on peut trouver un couple de valeur et vecteur propre en prenants le complexe conjugué de l'égalité $A\mathbf{v_2} = \lambda_2\mathbf{v_2}$:

$$\overline{A\mathbf{v_2}} = \overline{\lambda_2\mathbf{v_2}} \Leftrightarrow \overline{A}\overline{\mathbf{v_2}} = \overline{\lambda_2}\overline{\mathbf{v_2}} \Leftrightarrow A\overline{\mathbf{v_2}} = \overline{\lambda_2}\overline{\mathbf{v_2}}$$

Donc $\overline{\lambda_2}$ et $\overline{\mathbf{v_2}}$ sont une valeur et vecteur propre de A.

(a) Puisque $\lambda_3 := \overline{\lambda_2} \neq \lambda_2$, nous avons trois valeurs propres de A, qui est donc diagonalisable dans $\mathbb{C}$:

- *$\lambda_3 = 2e^{-i\pi/3}$ est une valeur propre associé au vecteur $\mathbf{v_3} = \overline{\mathbf{v_2}} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$*

Le polynome caractéristique de A est

$$c_A(t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t)(\lambda_3 - t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2\lambda_3 - (\lambda_2 + \lambda_1)t + t^2) = (4 - t)(4 - 2t + t^2)$$

Il n'y a qu'une valeur propre rélle, donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

(b) *On la propriété suivante : $A = PDP^{-1}$ où D est diagonale et P inversible, avec les valeurs propres sur la diagonale de D et les vecteurs propres associés dans les colonnes de P (dans le même ordre, mais on a le choix, p.ex. "3,2,1").*

$$D = \begin{pmatrix} 2e^{i\pi/3} & 0 & 0 \\ 0 & 2e^{-i\pi/3} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} i & -i & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) *L'inverse de P se calcule en calculant la forme échellonée réduite de la matrice $(P|I_3)$:*

$$\begin{pmatrix} i & -i & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{-iL_1;L_2-L_1}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -i & | & -i & 0 & 0 \\ 0 & 2 & i & | & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{L_1+iL_3;L_2-iL_3}{\to}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & -i & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 & | & i & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{2}L_2}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & -i & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & | & i/2 & 1/2 & -i/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{L_1+L_2}{\to}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -i/2 & 1/2 & i/2 \\ 0 & 1 & 0 & | & i/2 & 1/2 & -i/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -i/2 & 1/2 & i/2 \\ i/2 & 1/2 & -i/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) *On peut donc calculer $A = PDP^1 =$*

$$P \begin{pmatrix} 2e^{i\pi/3} & 0 & 0 \\ 0 & 2e^{-i\pi/3} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i/2 & 1/2 & i/2 \\ i/2 & 1/2 & -i/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -i & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -ie^{i\pi/3} & e^{i\pi/3} & ie^{i\pi/3} \\ ie^{-i\pi/3} & e^{-i\pi/3} & -ie^{-i\pi/3} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3} & ie^{i\pi/3} - ie^{-i\pi/3} & -e^{i\pi/3} - e^{-i\pi/3} + 4 \\ -ie^{i\pi/3} + ie^{-i\pi/3} & e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3} & ie^{i\pi/3} - ie^{-i\pi/3} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 3 \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 12

Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer les valeurs propres complexes de A et de B.

(b) Calculer les vecteurs propres complexes de A et de B.

(c) Soit P et Q les matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de A et de B, respectivement (associés à des valeurs propres différentes). Calculer $P^{-1}AP$ et $Q^{-1}BQ$ et interpréter le résultat.

Solution :

(a) Comme le polynôme caractéristique de A est donné par

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda\,\mathrm{I}_2) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2,$$

les racines (i.e. les valeurs propres complexes de A) sont $1-i$ et $1+i$.

On souhaite calculer le determinant de

$$B - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1-\lambda & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

On remarque que la somme de chaque ligne est

$$(1-\lambda) + (1-\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3}) = 3 - \lambda.$$

On effectue alors l'opération de colonne, qui ne modifie pas le déterminant :

$$C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3.$$

On obtient :

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 3-\lambda & 1-\lambda & 1-\sqrt{3} \\ 3-\lambda & 1+\sqrt{3} & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

On sort le facteur commun :

$$\det(A) = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1 & 1-\lambda & 1-\sqrt{3} \\ 1 & 1+\sqrt{3} & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

On applique :

$$R_2 \leftarrow R_2 - R_1, \qquad R_3 \leftarrow R_3 - R_1.$$

On obtient :

$$(3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 0 & -\lambda+\sqrt{3} & -2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & -\lambda-\sqrt{3} \end{vmatrix}.$$

Développement selon la première colonne :

$$(3-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda+\sqrt{3} & -2\sqrt{3}\\ 2\sqrt{3} & -\lambda-\sqrt{3}\end{vmatrix} = (3-\lambda)\left[\lambda^2-3-(-2\sqrt{3})(2\sqrt{3})\right] = (3-\lambda)(\lambda^2+9).$$

En conséquence, les racines de $P_B(\lambda$ *(i.e. les valeurs propres complexes de* B*) sont* 3, $-3i$ *et* $3i$.

(b) *On va calculer les vecteurs propres associés aux valeurs propres* $1-i$ *et* $1+i$ *de* A. *Pour* $\lambda = 1\pm i$, *l'espace propre est donné par le noyau des matrices ligne-équivalentes données par*

$$A-(1\pm i)\,\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix}\mp i & -1\\ 1 & \mp i\end{pmatrix} \xrightarrow{L_2\leftrightarrow L_1} \begin{pmatrix}1 & \mp i\\ \mp i & -1\end{pmatrix} \xrightarrow{L_2\leftarrow L_2\pm iL_1} \begin{pmatrix}1 & \mp i\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

ce qui nous dit que

$$E_{1\pm i} = \mathrm{Ker}(A-(1\pm i)\,\mathrm{I}_2) = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} : x_1 = \pm i x_2\right\} = \left\{\begin{pmatrix}\pm i x_2\\ x_2\end{pmatrix} : x_2\in\mathbb{C}\right\}$$
$$= \left\{x_2\begin{pmatrix}\pm i\\ 1\end{pmatrix} : x_2\in\mathbb{C}\right\} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}\pm i\\ 1\end{pmatrix}\right\}.$$

On va calculer les vecteurs propres associés aux valeurs propres 3, $-3i$ *et* $3i$ *de* B.

Pour $\lambda = 3$, *l'espace propre est donné par le noyau des matrices ligne-équivalentes données par*

$$B-3\,\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix}-2 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3}\\ 1+\sqrt{3} & -2 & 1-\sqrt{3}\\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & -2\end{pmatrix} \xrightarrow{L_1\leftarrow -\frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix}1 & \frac{\sqrt{3}-1}{2} & -\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ 1+\sqrt{3} & -2 & 1-\sqrt{3}\\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & -2\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-(1-\sqrt{3})L_1]{L_2\leftarrow L_2-(1+\sqrt{3})L_1} \begin{pmatrix}1 & \frac{\sqrt{3}-1}{2} & -\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 3 & -3\end{pmatrix} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+L_2} \begin{pmatrix}1 & \frac{\sqrt{3}-1}{2} & -\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_2\leftarrow -\frac{1}{3}L_2} \begin{pmatrix}1 & \frac{\sqrt{3}-1}{2} & -\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{L_1\leftarrow L_1-\frac{\sqrt{3}-1}{2}L_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

ce qui nous dit que

$$E_3 = \mathrm{Ker}(B-3\,\mathrm{I}_3) = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} : x_1 = x_2 = x_3\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x_3\\ x_3\\ x_3\end{pmatrix} : x_3\in\mathbb{C}\right\}$$
$$= \left\{x_3\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} : x_3\in\mathbb{C}\right\} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right\}.$$

Pour $\lambda = \pm 3i$, l'espace propre est donné par le noyau des matrices ligne-équivalentes données par

$$B - (\pm 3i)\,\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 \mp 3i & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1\mp 3i & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \mp 3i \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1\pm 3i}{10} L_1} \begin{pmatrix} 1 & (1-\sqrt{3})\frac{1\pm 3i}{10} & (1+\sqrt{3})\frac{1\pm 3i}{10} \\ 1+\sqrt{3} & 1\mp 3i & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1\mp 3i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - (1-\sqrt{3})L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - (1+\sqrt{3})L_1} \begin{pmatrix} 1 & (1-\sqrt{3})\frac{1\pm 3i}{10} & (1+\sqrt{3})\frac{1\pm 3i}{10} \\ 0 & \frac{6}{5}(1\mp 2i) & \frac{3}{5}(1\mp 2i)(1\mp\sqrt{3}i) \\ 0 & \frac{3}{5}(1\mp 2i)(1\pm\sqrt{3}i) & \frac{6}{5}(1\mp 2i) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow \frac{5}{3(1\mp 2i)} L_3]{L_2 \leftarrow \frac{5}{6(1\mp 2i)} L_2} \begin{pmatrix} 1 & (1-\sqrt{3})\frac{1\pm 3i}{10} & (1+\sqrt{3})\frac{1\pm 3i}{10} \\ 0 & 1 & \frac{1\mp\sqrt{3}i}{2} \\ 0 & (1\pm\sqrt{3}i) & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - (1\pm\sqrt{3}i)L_2]{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{(1-\sqrt{3})(1\pm 3i)}{10} L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1\mp\sqrt{3}i}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui nous dit que

$$E_{\pm 3i} = \mathrm{Ker}(B - (\pm 3i)\,\mathrm{I}_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 = \frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2} x_3, x_2 = \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2} x_3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2} x_3 \\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2} x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3$$

$$= \left\{ x_3 \begin{pmatrix} \frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2} \\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2} \\ 1 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{C} \right\} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2} \\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(c) *D'après l'item précédent on a que*

$$P = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ce qui donne

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix},$$

et

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ce qui donne

$$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3i & 0 \\ 0 & 0 & 3i \end{pmatrix}.$$

Interpretation.

A Les valeurs propres non-réels de A ont module $|1-i| = |1+i| = \sqrt{2}$. Leurs représentations en forme polaire sont respectivement $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$ et $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$.

$$A = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \sin\frac{\pi}{4} & -\cos\frac{\pi}{4} \\ \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'une rotation de $\frac{\pi}{4}$ combinée avec une omothéthie centrale de coefficient $\sqrt{2}$.

B Les valeurs propres de B ont tous module $|3| = |3i| = |-3i| = 3$ Leurs représentations en forme polaire sont respectivement $3e^0$, $3e^{\frac{\pi}{2}}$ et $3e^{-\frac{\pi}{2}}$. L'application de B va multiplier la norme de chaque vecteur par 3. Dans le plan engendré les espaces propres E_{λ_2} et E_{λ_3} il s'agit d'une rotation de $\pi/2$.

Partiellement en classe

Solution : *Les solutions des exercices en classe sont sur les slides, cf https://moodle.epfl.ch/mod/url/v*

Exercice 13

Parmi les affirmations suivantes, lequelles sont toujours vraies, par rapport au produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$? Soit A une matrice $m \times n$

A. Chaque ligne de A est orthogonale à tous les vecteurs dans $\ker(A)$.

B. Soit $m > n$. Les lignes de A peuvent être orthogonales.

C. Soit $m > n$. Les lignes de A peuvent être orthonormées.

D. Si les colonnes de A sont orthonormée, alors $A^TA = I_n$.

E. Si les lignes de A sont orthonormée, alors $A^TA = I_n$.

F. Soit V un espace vectoriel et $\langle\, ,\, \rangle \colon V \times V \to \mathbb{R}$ un produit scalaire. Soient $u, v \in V$ deux vecteurs. Alors u et v sont orthogonaux si et seulement si la distance entre u et v est la même que la distance entre u et $-v$.

Solution :

- *Vrai : A, B, D F.*
- *Faux : C, E. C : $AA^T = I_m$.*

Exercice 14

Appliquer la méthode de Gram-Schmidt pour orthogonaliser la base $\{w_1, w_2\}$ du sous-espace vectoriel $V = \text{Vect}\{w_1, w_2\} \subset \mathbb{R}^3$, où $w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 15

Appliquer la méthode de Gram-Schmidt pour orthogonaliser la base $\{w_1, w_2, w_3\}$ du sous-espace vectoriel $V = \text{Vect}\{w_1, w_2, w_3\} \subset \mathbb{R}^4$, où

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16

Soient A une matrice $n \times n$ et B une matrice de taille $m \times n$ telle que $BB^T = I_m$. Parmi les affirmations suivantes, lequelles sont toujours vraies, par rapport au produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$?

A. Si les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, alors A est inversible.

B. Si les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, alors les lignes de A forment une base orthonormée.

C. Les colonnes de B forment un ensemble orthonormé.

D. Les lignes de B forment un ensemble orthonormé.

E. $B^T B = I_n$.

F. B est inversible.

Solution :

- *Vrai : A, B, D,*
- *Faux : C, E, F.*

Exercice 17

Soient $x_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ et soit $W = \text{Vect}\{x_1, x_2, x_3\}$. Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, sans normalisation et sans changer l'ordre, appliqué à la base $\{x_1, x_2, x_3\}$ de W nous fournit une base orthogonale $\{v_1, v_2, v_3\}$ de W, où

- ☐ $v_3 = x_3 - v_1 + v_2$
- ☐ $v_3 = x_3 + 9v_1 - 9v_2$
- ☒ $v_3 = x_3 + v_1 - v_2$
- ☐ $v_3 = x_3$

Exercice 18

Soit $W = Vect\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$. Trouver une base de $W^\perp$.

Exercice 19

Parmi les affirmations suivantes, lequelles sont toujours vraies ?

A. Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si v est dans $W^\perp$ et dans W, alors $v = 0$.

B. Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si $y \in W$, alors sa projection orthogonale sur W est $p_W(y) = y$.

Solution :

- *Vrai : A, B*

Informations générales, séries et corrigés : cf.
`http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414`
Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications.* De Boeck, Bruxelles, 2005.