Série 11

Exercice 1

a) Trouver un vecteur non nul orthogonal à $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Soient $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}, \quad \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|}, \quad \frac{1}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}\mathbf{w}, \quad \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}.$$

c) Calculer la distance entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ et la distance entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{w}$.

d) Calculer les vecteurs unitaires correspondant à $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ (pointant dans la même direction que le vecteur original).

Exercice 2

Soient $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont orthogonaux.

b) Calculer la projection orthogonale $\mathbf{p}_W(\mathbf{v})$ de $\mathbf{v}$ sur $W = \text{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

c) Donner la décomposition $\mathbf{v} = \mathbf{z} + \mathbf{p}_W(\mathbf{v})$, où $\mathbf{z} \in W^\perp$.

Même question pour $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Même question pour $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Soient $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ et $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ deux bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$. On définit les matrices de taille $n \times n$, $U = (\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_n)$ et $V = (\mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_n)$. Montrer que $U^T U = I_n$, $V^T V = I_n$ et que UVest inversible.

Exercice 4

Appliquer la méthode de Gram-Schmidt pour orthogonaliser les bases de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ suivantes.

a) $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ base d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$, avec $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ base d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$, avec $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Donner une base orthonormale pour a) et b).

Exercice 5

Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_q\}$ une base orthogonale de W. Soit $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ une base orthogonale de $W^\perp$.
Montrer que $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_q,\ \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ est orthogonale et prouver la relation

$$\mathrm{dim} W + \mathrm{dim} W^\perp = n.$$

Exercice 6

Déterminer la solution au sens des moindres carrés de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

a) en utilisant l'équation normale lorsque

i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$;

b) en utilisant la méthode QR lorsque

i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

ii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Soit A une matrice de taille $m \times n$.

a) Montrer que $\mathrm{Ker} A = \mathrm{Ker}(A^T A)$.

b) Montrer que $A^T A$ est inversible si et seulement si les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

Exercice 8

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ -13 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

La solution au sens des moindres carrés $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ du système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est telle que

$$\square \hat{x}_2 = -4$$
$$\square \hat{x}_2 = 3$$
$$\square \hat{x}_2 = -3$$
$$\square \hat{x}_2 = 4$$

Exercice 9

Soit $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donner l'ensemble W des vecteurs orthogonaux à $\mathbf{v}$. Est-ce un espace vectoriel ? Si oui, trouver une base de W. Justifier les réponses.

Exercice 10

Parmi les matrices suivantes, indiquer celles qui sont diagonalisables (toujours en justifiant), et le cas échéant, diagonaliser ces matrices et exhiber les vecteurs propres.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11

Soient

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et A une matrice 3×3 à coefficients réels telle que :

- $\lambda_1 = 4$ est une valeur propre associé au vecteur $\mathbf{v_1}$
- $\lambda_2 = 2e^{i\pi/3}$ est une valeur propre associé au vecteur $\mathbf{v_2}$

(a) Calculer le polynôme caracteristique de A dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$. Est-ce que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$?

(b) Calculer D et P tels que $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale et P inversible.

(c) Calculez P^{-1}.

(d) *Optionnel : calculez A*

Rappel :

$$e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3} = 2\frac{e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3}}{2} = 2\cos(\pi/3) = 2\frac{1}{2} = 1$$
$$-ie^{i\pi/3} + ie^{-i\pi/3} = -i2\frac{e^{i\pi/3} - e^{-i\pi/3}}{2} = 2\sin(\pi/3) = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Exercice 12

Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer les valeurs propres complexes de A et de B.

(b) Calculer les vecteurs propres complexes de A et de B.

(c) Soit P et Q les matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de A et de B, respectivement (associés à des valeurs propres différentes). Calculer $P^{-1}AP$ et $Q^{-1}BQ$ et interpréter le résultat.

Partiellement en classe

(Ces exercices seront sur les slides.)

Exercice 13

Parmi les affirmations suivantes, lequelles sont toujours vraies, par rapport au produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$? Soit A une matrice mn

A. Chaque ligne de A est orthogonale à tous les vecteurs dans $\ker(A)$.

B. Soit $m > n$. Les lignes de A peuvent être orthogonales.

C. Soit $m > n$. Les lignes de A peuvent être orthonormées.

D. Si les colonnes de A sont orthonormée, alors $A^T A = I_n$.

E. Si les lignes de A sont orthonormée, alors $A^T A = I_n$.

F. Soit V un espace vectoriel et $\langle\,,\,\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ un produit scalaire. Soient $u, v \in V$ deux vecteurs. Alors u et v sont orthogonaux si et seulement si la distance entre u et v est la même que la distance entre u et $-v$.

Exercice 14

Appliquer la méthode de Gram-Schmidt pour orthogonaliser la base $\{w_1, w_2\}$ du sous-espace vectoriel $V = \mathrm{Vect}\{w_1, w_2\} \subset \mathbb{R}^3$, où $w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 15

Appliquer la méthode de Gram-Schmidt pour orthogonaliser la base $\{w_1, w_2, w_3\}$ du sous-espace vectoriel $V = \mathrm{Vect}\{w_1, w_2, w_3\} \subset \mathbb{R}^4$, où

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16

Soient A une matrice $n \times n$ et B une matrice de taille $m \times n$ telle que $BB^T = I_m$. Parmi les affirmations suivantes, lequelles sont toujours vraies, par rapport au produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$?

A. Si les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, alors A est inversible.

B. Si les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, alors les lignes de A forment une base orthonormée.

C. Les colonnes de B forment un ensemble orthonormé.

D. Les lignes de B forment un ensemble orthonormé.

E. $B^T B = I_n$.

F. B est inversible.

Exercice 17

Soient $x_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ et soit $W = \text{Vect}\{x_1, x_2, x_3\}$. Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, sans normalisation et sans changer l'ordre, appliqué à la base $\{x_1, x_2, x_3\}$ de W nous fournit une base orthogonale $\{v_1, v_2, v_3\}$ de W, où

- ☐ $v_3 = x_3 - v_1 + v_2$
- ☐ $v_3 = x_3 + 9v_1 - 9v_2$
- ☐ $v_3 = x_3 + v_1 - v_2$
- ☐ $v_3 = x_3$

Exercice 18

Soit $W = Vect\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Trouver une base de $W^\perp$.

Exercice 19

Parmi les affirmations suivantes, lequelles sont toujours vraies, par rapport au produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$?

A. Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si v est dans $W^\perp$ et dans W, alors $v = 0$.

B. Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si $y \in W$, alors sa projection orthogonale sur W est $p_W(y) = y$.

Informations générales, séries et corrigés : cf.
`http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414`
Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications.* De Boeck, Bruxelles, 2005.