Série 10 (Corrigé)

Exercice 1

Parmi les matrices suivantes, indiquer celles qui sont diagonalisables (toujours en justifiant), et le cas échéant, diagonaliser ces matrices et exhiber les vecteurs propres.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution :

- *A n'est pas diagonalisable. Ses valeurs propres sont : $-2, -2, 1$. La dimension de l'espace propre pour $\lambda = -2$ est seulement 1 alors que la multiplicité est 2.*

- *B est diagonalisable. En effet, les valeurs propres sont distinctes :*

$$2, 1, \frac{1}{2}\left(7+\sqrt{13}\right), \frac{1}{2}\left(7-\sqrt{13}\right).$$

En général, les vecteurs propres sont tels que $(B-\lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. On voit facilement que $\mathbf{v}_1 = (1\ 0\ 0\ 0)^T$ et $\mathbf{v}_2 = (0\ 1\ 0\ 0)^T$ sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. Pour trouver les vecteurs propres $\mathbf{v}_3$ et $\mathbf{v}_4$ et pour $\lambda_3 = \frac{1}{2}\left(7+\sqrt{13}\right)$ et $\lambda_4 = \frac{1}{2}\left(7-\sqrt{13}\right)$ nous devons mettre les matrices $(B-\lambda_3 I)$ et $(B-\lambda_4 I)$ sous forme échelonnée réduite. En général on a

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda-\frac{3}{4-\lambda} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{4}{2-\lambda} & \dfrac{1}{2-\lambda} \\ 0 & 1 & \dfrac{2}{1-\lambda} & \dfrac{3}{1-\lambda} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{(4-\lambda)} \\ 0 & 0 & 0 & (3-\lambda)(4-\lambda)-3 \end{pmatrix}$$

On peut voir que $(3-\lambda)(4-\lambda)-3=0$ *pour* $\lambda=\lambda_3$ *et* $\lambda=\lambda_4$. *Il suffit de choisir la troisième composante égal à 1 et les autres composantes sont facilement dérivées :*

$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix} -\dfrac{4-(4-\lambda)}{2-\lambda} \\ -\dfrac{2-3(4-\lambda)}{1-\lambda} \\ 1 \\ -(4-\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\lambda}{2-\lambda} \\ \dfrac{10-3\lambda}{1-\lambda} \\ 1 \\ -4+\lambda \end{pmatrix}.$$

Donc, on obtient

$$\mathbf{v}_3=\begin{pmatrix} -2+\sqrt{13} \\ \dfrac{-17+7\sqrt{13}}{6} \\ 1 \\ \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4=\begin{pmatrix} -2-\sqrt{13} \\ \dfrac{-17-7\sqrt{13}}{6} \\ 1 \\ \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix}$$

Maintenant, si $\widetilde{D}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ *et* $P=(\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\ \mathbf{v}_4)$, *on a* $B=P\widetilde{D}P^{-1}$.

- *C est diagonalisable. Valeurs propres :* $5,5,-3,-3$.
  Vecteurs propres associés : $\mathbf{v}_1=(-16\ 4\ 0\ 1)^T, \mathbf{v}_2=(-8\ 4\ 1\ 0)^T, \mathbf{v}_3=(0\ 0\ 1\ 0)^T$, $\mathbf{v}_4=(0\ 0\ 0\ 1)^T$.
  Remarque : les vecteurs propres $(0\ 0\ 1\ 0)^T,(0\ 0\ 0\ 1)^T$ *étaient faciles à deviner.*
  Maintenant, si $\widetilde{D}=\operatorname{diag}(5,5,-3,-3)$ *et* $P=(\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\ \mathbf{v}_4)$, *on a* $C=P\widetilde{D}P^{-1}$.

- *D est diagonalisable. Valeurs propres :* $5,5,4$.
  Vecteurs propres associés : $\mathbf{v}_1=(-2\ 0\ 1)^T, \mathbf{v}_2=(0\ 1\ 0)^T, \mathbf{v}_3=(-1\ 2\ 0)^T$.
  Remarque : le vecteur propre $(0\ 1\ 0)^T$ *était facile à deviner.*
  Maintenant, si $\widetilde{D}=\operatorname{diag}(5,5,4)$ *et* $P=(\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3)$, *on a* $D=P\widetilde{D}P^{-1}$.

- *E n'est pas diagonalisable. Valeurs propres :* $0,0$. *La dimension de l'espace propre associé à* $\lambda=0$ *est seulement* 1 *(voir exercice 5).*

Exercice 2

Soit A une matrice de taille $n\times n$. Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses (justifier).

a) A est diagonalisable si et seulement si elle possède n valeurs propres distinctes.
Solution : *Faux. En effet la matrice identité est diagonale donc diagonalisable, et pourtant sa seule valeur propre est* 1.

b) A est diagonalisable si A possède n vecteurs propres.
Solution : *Faux. A doit posséder n vecteurs propres linéairement indépendants.*

c) Si A est diagonalisable, alors A est inversible.
Solution : *Faux. Méthode 1 : La matrice nulle est diagonalisable mais non inversible. Méthode 2 : On peut aussi proposer la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *diagonale donc diagonalisable, mais non inversible.*

d) Si A est inversible, alors A est diagonalisable.

Solution : *Faux (pour $n \geq 2$). En effet, la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *est inversible, mais non diagonalisable, car l'espace propre associé à la valeur propre 1 (de multiplicité 2) est de dimension seulement 1.*

e) Si 0 est valeur propre, alors $\mathrm{rg}\,(A) < n$.
Solution : *Vrai. Si 0 est valeur propre, la dimension du noyau est non nulle, et donc* $\mathrm{rg}\,(A) = n - \dim \mathrm{Ker}\, A < n$.

f) Pour tout matrice inversible P de taille $n \times n$, λ est une valeur propre de A si et seulement si λ est une valeur propre de $P^{-1}AP$.
Solution : *Vrai. A et $B = P^{-1}AP$ sont semblables, donc elles ont les mêmes valeurs propres (avec les mêmes multiplicités).*
Remarque : si on note $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$ les vecteurs propres de B, alors les vecteurs propres de A sont $P\mathbf{v}_1, P\mathbf{v}_2, \dots$.

Exercice 3

Démontrer ou trouver un contre-exemple. Soient $n \geq 2$ et $k \geq 2$ entiers.

a) Si A est une matrice $n \times n$ diagonalisable, alors A^k est diagonalisable.

b) Si A est une matrice $n \times n$ et A^k est diagonalisable, alors A est diagonalisable.

Solution :

a) L'affirmation est vraie. Si A est diagonalisable, alors il existe P une matrice $n \times n$ inversible et D une matrice $n \times n$ diagonale telles que $P^{-1}AP = D$. Alors, on a

$$P^{-1}A^kP = P^{-1}APP^{-1}AP \dots P^{-1}AP = DD \dots D = D^k,$$

et comme D^k est diagonale, A^k est bien diagonalisable.

b) L'affirmation est fausse. En effet, on considère la matrice A avec des zéros partout sauf un 1 en haut à droite (ligne 1, colonne n). Cette matrice A n'est pas diagonalisable, et pourtant A^k est nulle donc diagonalisable.

Exercice 4

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ si et seulement si $a \neq d$.
Solution : *Une matrice A de traille $n \times n$ est semblable à une matrice diagonale D, c-à-d A est diagonalisable, si et seulement si elle admet n vecteurs propres linéairement indépendants. Dans ce cas, les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A. Nous avons aussi vu au cours que toute matrice $n \times n$ admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.*

Ici, les valeurs propres de A sont a et d et ils correspondent aux coefficients diagonaux de D. Si $a \neq d$ alors les deux valors propres sont associes à deux vecteurs propres différents et la *matrice est diangonalisable. Autrement, si a = d, l'espace propre associe à la valeur propre a est de dimension 1 et donc il n'existe pas deux vecteurs propres linéairement indépendants, ce qui implique que la matrice A n'est pas diagonalisable.*

Exercices supplémentaires

Exercice 5

Déterminer lesquelles, parmi les matrices suivantes, sont diagonalisables :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solution :

A. *Oui car A est déjà diagonale.*

B. *Oui. Les valeurs propres de B sont $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 1$. Les valeurs propres de B sont distinctes, donc une famille avec un vecteur propre pour λ_1 et un vecteur propre pour λ_2 est linéairement indépendante, et constitue une base de $\mathbb{R}^2$. Ainsi, B est diagonalisable.*

C. *Oui. Les valeurs propres de C sont $4, 5, 5$ (obtenues en cherchant les racines du polynôme caractéristique). Comme la valeur propre 5 est de multiplicité 2, il faut vérifier si la dimension de l'espace propre associé est aussi 2. On calcule :*

$$C - 5I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes 1 et 3 sont proportionnelles, et la colonne 2 est nulle, d'où $\mathrm{rg}(C - 5I_3) = 1$. Par conséquent, $\dim \mathrm{Ker}(C - 5I_3) = 3 - 1 = 2$, et la matrice C est diagonalisable.

D. *Oui. Le polynôme caractéristique de D est*

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 36\lambda = -\lambda(\lambda - 6)(\lambda + 6).$$

Les valeurs propres sont donc $0, -6, 6$. Elles sont distinctes donc D est diagonalisable.

Remarque : le théorème spectral stipule que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

Exercice 6

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Un espace propre d'une matrice carrée A est l'espace nul d'une certaine matrice.

b) Soit A une matrice carrée. Si A^2 est la matrice nulle, alors la seule valeur propre de A est 0.

c) Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les éléments de sa diagonale principale.

d) L'ensemble $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ des vecteurs propres associés aux valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ d'une matrice carrée A est linéairement dépendant.

Solution : *Vrai : a) C'est le noyau de $A - \lambda.\mathrm{Id}$, b) On que $0 = A^2.v = \lambda A.v$, donc forcément $\lambda = 0$, c)Suffit de calculer le polynôme caractéristique. Faux : d)Prendre la matrice carrée $2x2$ avec 1 et 2 sur la diagonale. Ses vecteurs propres sont donnés par la bases canonique de $\mathbb{R}^2$, donc ne sont pas linéairement dépendants.*

Exercice 7

Le polynôme caractéristique de la matrice

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

est

$$\square(-\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 2) \qquad \square(2+\lambda)(-\lambda^2 + 3\lambda - 2)$$

$$\square(2+\lambda)(\lambda^2 + 3\lambda - 6) + 6(2-\lambda) \qquad \square(2-\lambda)(\lambda^2 + \lambda + 4) + 3(2-\lambda)$$

Solution : $-\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 2$

Exercice 8

Est-ce que $\lambda = 2$ est une valeur propre de la matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

de multiplicité géométrique égale à 2 ? (Vrai ou faux).
Solution : *Faux. Si on note A la matrice, $A - 2I_3$ est de rang 2, donc la multiplicité géométrique est 1.*

Exercice 9

Est-ce que la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -6 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

est diagonalisable ? (Vrai ou faux).
Solution : *Vrai. Le polynôme caractéristique est scindé à racines simples : $-(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$.*

Partiellement en classe

(Ces exerices seront sur les slides.)

Exercice 10

Est-que la matrice suivante est diagonalisable diagonalisable dans $\mathbb{R}$? et dans $\mathbb{C}$? Si oui, calculer sa diagonalisation.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Solution : *Le polynôme caractéristique de A est*

$$c_A(t) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-t & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 2-t & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & \frac{1}{2}-t \end{vmatrix} = (2-t)\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-t & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2}-t \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(2-t)\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-t & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2(t-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}$$

$$= +\frac{\sqrt{3}}{2}(2-t)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{2(t-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}-t & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}(2-t)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{2(t-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2(t-\frac{1}{2})^2}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}$$

$$= (2-t)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{2\sqrt{3}(t-\frac{1}{2})}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4}+(t-\frac{1}{2})^2 \end{vmatrix} = (2-t)\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-t+t^2\right) = (2-t)\left(1-t+t^2\right)$$

Une valeur propre de A est $\lambda_1 = 2$.

Le polynôme $1-t+t^2$ est irréductible dans $\mathbb{R}$. En effet son discriminant est

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0.$$

Par conséquence, A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Dans $\mathbb{C}$, on observe que $(i\sqrt{3})^2 = -3 = \Delta$. Les racines complexes sont donc $\lambda_{2,3} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$. En on déduit que

$$c_A(t) = (2-t)(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}-t)(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}-t)$$

Ce polynôme a trois racines complexes de multiplicité algebrique égale à 1.

La multiplicité géométrique est toujours comprise entre 1 et la multiplicité algebrique. Donc ici elles sont toutes égales à 1. Leur somme est égale à 3, qui est aussi la dimesion de $\mathbb{R}^3$. A est diagonalisable dans les complexes.

Comment diagonaliser A dans $\mathbb{C}$?

- *Caluler un base des noyaux de E_{λ_1}, E_{λ_2} et E_{λ_3}*
- *Vérifier si pour chaque valeur propre, la multiplicité algébrique et géometrique coincident.*

- *Si oui et si leur somme est égale à $n = 3$, alors A est diagonalisable (dans $\mathbb{C}$)*
- *mettre les vecteurs de bases comme colonne dans la matrice P*
- *... et dans le même ordre les valeurs propres dans la diagonale de la matric D.*

Alors

$$A = PDP^{-1}$$

$\lambda_1 = 2$. *Base de* $E_{\lambda_1} = \ker(A - \lambda_1 I)$:

$$A - \lambda_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 2 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 2-2 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Une variable libre, x_2. *Base de* $E_{\lambda_1} = \ker(A - \lambda_1 I)$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. *Base de* $E_{\lambda_2} = \ker(A - \lambda_2 I)$:

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 2 - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{i\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 2 - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$:^{iL_1} \overset{et\ L_3+L_1}{\to} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Une variable libre, x_3. *Base de* $E_{\lambda_2} = \ker(A - \lambda_2 I)$: $\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. *Base de* $E_{\lambda_3} = \ker(A - \lambda_3 I)$:

$$A - \lambda_3 I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1-i\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 2 - \frac{1-i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} - \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 2 - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & i \end{pmatrix}$$

$$:^{-iL_1} \overset{et\ L_3+L_1}{\to} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Une variable libre, x_3. *Base de* $E_{\lambda_3} = \ker(A - \lambda_3 I)$: $\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Avec

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -i & i \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ \ et\ D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \ \ on\ a\ A = PDP^{-1}$$

Exercice 11

Est-que la matrice suivante est diagonalisable dans $\mathbb{R}$? et dans $\mathbb{C}$?

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution :

$$c_B(t) = \begin{vmatrix} -t-1 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2-t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2-t & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -t \end{vmatrix} :\overset{L(2,4,1)}{\to}: \begin{vmatrix} -t-1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1-t & 0 & 1-t \\ 0 & 0 & 2-t & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -t \end{vmatrix}$$

$$:\overset{L(1,4,-2)}{\to}: \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 & 2t-2 \\ 0 & 1-t & 0 & 1-t \\ 0 & 0 & 2-t & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -t \end{vmatrix} = (2-t) \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 2t-2 \\ 0 & 1-t & 1-t \\ -1 & -1 & -t \end{vmatrix}$$

$$= (2-t)(1-t) \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 2t-2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -t \end{vmatrix} :\overset{L(3,2,1)}{\to}: (2-t)(1-t) \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 2t-2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1-t \end{vmatrix}$$

$$= (2-t)(1-t) \begin{vmatrix} 1-t & 2t-2 \\ -1 & 1-t \end{vmatrix} = (2-t)(1-t)\left[(1-t)^2 + 2t - 2\right] = -(2-t)(1-t)^2(1+t)$$

Multiplicités algébriques et géométriques :

- $\lambda_1 = 2$ *a mult. alg. égale à 1, donc sa mult. géo. est aussi 1.*
- $\lambda_2 = -1$ *a mult. alg. égale à 1, donc sa mult. géo. est aussi 1.*
- $\lambda_3 = +1$ *a mult. alg. égale à 2, donc sa mult. géo. est 1 ou 2.*

Pour savoir si B est diagonalisable, il suffit de connaitre la multiplicité géometrique de λ_3. Il faut donc calculer la dimensions de $E_{\lambda_3} = \ker(A - \lambda_3 I)$:

$$A - \lambda_3 I = \begin{pmatrix} -1-1 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2-1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a 2 variables libres, donc la dimensions de $E_{\lambda_3} = \ker(A - \lambda_3 I)$ est 2, i.e. la multiplicité gómétrique de λ_3 est 2 et la sommes des multiplicité géométriques des espaces propres est égale à $n = 4$, donc B est diagonlisable dans $\mathbb{R}$ (et donc dans $\mathbb{C}$).

Informations générales, séries et corrigés : cf.
`http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414`
Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications.* De Boeck, Bruxelles, 2005.