Série 10

Exercice 1

Parmi les matrices suivantes, indiquer celles qui sont diagonalisables (toujours en justifiant), et le cas échéant, diagonaliser ces matrices et exhiber les vecteurs propres.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Soit A une matrice de taille $n \times n$. Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses (justifier).

a) A est diagonalisable si et seulement si elle possède n valeurs propres distinctes.

b) A est diagonalisable si A possède n vecteurs propres.

c) Si A est diagonalisable, alors A est inversible.

d) Si A est inversible, alors A est diagonalisable.

e) Si 0 est valeur propre, alors $\operatorname{rg}(A) < n$.

f) Pour tout matrice inversible P de taille $n \times n$, λ est une valeur propre de A si et seulement si λ est une valeur propre de $P^{-1}AP$.

Exercice 3

Démontrer ou trouver un contre-exemple. Soient $n \geq 2$ et $k \geq 2$ entiers.

a) Si A est une matrice $n \times n$ diagonalisable, alors A^k est diagonalisable.

b) Si A est une matrice $n \times n$ et A^k est diagonalisable, alors A est diagonalisable.

Exercice 4

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ si et seulement si $a \neq d$.

Exercices supplémentaires

Exercice 5

Déterminer lesquelles, parmi les matrices suivantes, sont diagonalisables :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Un espace propre d'une matrice carrée A est l'espace nul d'une certaine matrice.

b) Soit A une matrice carrée. Si A^2 est la matrice nulle, alors la seule valeur propre de A est 0.

c) Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les éléments de sa diagonale principale.

d) L'ensemble $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ des vecteurs propres associés aux valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ d'une matrice carrée A est linéairement dépendant.

Exercice 7

Le polynôme caractéristique de la matrice

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

est

$$\square(-\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 2) \qquad \square(2+\lambda)(-\lambda^2 + 3\lambda - 2)$$

$$\square(2+\lambda)(\lambda^2 + 3\lambda - 6) + 6(2-\lambda) \qquad \square(2-\lambda)(\lambda^2 + \lambda + 4) + 3(2-\lambda)$$

Exercice 8

Est-ce que $\lambda = 2$ est une valeur propre de la matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

de multiplicité géométrique égale à 2 ? (Vrai ou faux).

Exercice 9

Est-ce que la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -6 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

est diagonalisable ? (Vrai ou faux).

Partiellement en classe

(Ces exerices seront sur les slides.)

Exercice 10

Est-que la matrice suivante est diagonalisable diagonalisable dans $\mathbb{R}$? et dans $\mathbb{C}$? Si oui, calculer sa diagonalisation.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 11

Est-que la matrice suivante est diagonalisable dans $\mathbb{R}$? et dans $\mathbb{C}$?

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Informations générales, séries et corrigés : cf.
`http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414`
Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications.* De Boeck, Bruxelles, 2005.