

## Série 9 (Corrigé)

### Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

1. Calculer le polynôme caractéristique.
2. Calculer les valeurs propres d'une matrice.
3. Calculer les vecteurs propres d'une matrice associé à une valeur propre
4. Construire une base d'un espace propre
5. Diagonaliser une matrice

### Nouveau vocabulaire dans cette série

- Valeur propre, vecteur propre, espace propre
- Polynôme caractéristique
- Diagonalisation d'une matrice, matrice diagonalisable

La matrice  $D$  de l'exercice 1 sera traité en classe.

### Exercice 1

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{et } E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 17 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les vecteurs propres de chacune de ces matrices  $A, B, C, D, E$ .

**Solution :**

A. Le polynôme caractéristique de  $A$  est  $\lambda^2 - 5\lambda + 5$ . Les valeurs propres de  $A$  sont  $\left\{ \frac{5+\sqrt{5}}{2}, \frac{5-\sqrt{5}}{2} \right\}$ . Les vecteurs propres correspondants sont  $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

B. Le polynôme caractéristique de  $B$  est  $(\lambda - 4)^2$ . Les valeurs propres de  $B$  sont  $\{4, 4\}$  (il y a une seule valeur propre 4 de multiplicité 2). Vecteurs propres correspondants :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Remarque : l'espace propre est de dimension seulement 1 alors que la valeur propre est de multiplicité 2, la matrice n'est pas diagonalisable.

C. Le polynôme caractéristique de  $C$  est  $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda - 1)^2$ . Les valeurs propres de  $C$  sont  $\{4, 1, 1\}$  c-à-d les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire.

Les vecteurs propres correspondants sont  $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ .

D. Le polynôme caractéristique de  $D$  est  $-\lambda^3 + 36\lambda = -\lambda(\lambda + 6)(\lambda - 6)$ . Les valeurs propres de  $D$  sont donc  $\{-6, 0, 6\}$ . Les vecteurs propres correspondants sont

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

E. Le polynôme caractéristique de  $E$  est  $\lambda^4 - 10\lambda^3 + 35\lambda^2 - 50\lambda + 24 = (\lambda - 3)(\lambda - 4)(\lambda - 1)(\lambda - 2)$ . Les valeurs propres de  $E$  sont  $\{3, 4, 1, 2\}$  c-à-d les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire. Les vecteurs propres correspondants sont

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 31 \\ -34 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 113 \\ -60 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

## Exercice 2

Soit  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ . Montrer que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ .

**Solution :**  $\lambda A$  est obtenue à partir de  $A$  en faisant  $n$  opérations élémentaires sur les lignes : on multiplie les lignes 1 à  $n$  par  $\lambda$ . Chacune de ces opérations multiplie le déterminant par  $\lambda$ . Donc  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ .

## Exercice 3

Soit  $A$  une matrice de taille  $n \times n$  et  $k \geq 2$  un entier. Montrer que si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  avec pour vecteur propre  $\mathbf{v}$ , alors  $\lambda^k$  est une valeur propre de

$$A^k = \underbrace{A A \cdots A}_{k \text{ fois}}$$

avec pour vecteur propre  $\mathbf{v}$ .

**Solution :** Par définition, on a  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ . Par récurrence sur  $k$ , on montre  $A^k\mathbf{v} = \lambda^k\mathbf{v}$ . Supposons le résultat vrai au rang  $k - 1$ , c-à-d  $A^{k-1}\mathbf{v} = \lambda^{k-1}\mathbf{v}$ . On a alors :

$$A^k\mathbf{v} = A(A^{k-1}\mathbf{v}) = A(\lambda^{k-1}\mathbf{v}) = \lambda^{k-1}A\mathbf{v} = \lambda^{k-1}\lambda\mathbf{v} = \lambda^k\mathbf{v}.$$

Ceci montre que le vecteur  $\mathbf{v}$ , non nul, est un vecteur propre de la matrice  $A^k$  associé à la valeur propre  $\lambda^k$ .

## Exercices supplémentaires

### Exercice 4

Montrer :

- Si  $A$  est une matrice inversible, alors  $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ .
- Si  $A$  et  $Q$  sont des matrices inversibles de taille  $n \times n$ , alors  $\det(QAQ^{-1}) = \det A$ .
- Si  $U$  est une matrice carrée de taille  $n \times n$  telle que  $U^T U = I_n$ , alors  $\det U = \pm 1$ .
- Si  $A$  est une matrice carrée telle que  $\det A^3 = 0$ , alors  $A$  est non inversible.

**Solution :**

a) On a  $1 = \det I_n = \det(A^{-1}A) = \det A^{-1} \cdot \det A$ . Ainsi,  $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ .

b) C'est une conséquence de a) (à noter qu'il n'est pas nécessaire que  $A$  soit inversible) :

$$\det(QAQ^{-1}) = \det Q \cdot \det A \cdot \det Q^{-1} = \det Q \cdot \det A \cdot \frac{1}{\det Q} = \det A.$$

c) (De telles matrices  $U$  s'appellent des matrices orthogonales). On a  $1 = \det I_n = \det(U^T U) = \det U^T \cdot \det U = (\det U)^2$ . Ainsi,  $(\det U)^2 = 1$ , d'où  $\det U = \pm 1$ .

d) On a  $\det A^3 = (\det A)^3$ . Ainsi,  $(\det A)^3 = 0$  ssi  $\det A = 0$ , ce qui équivaut au fait que la matrice  $A$  est non inversible.

### Exercice 5

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- La matrice  $A$  n'est pas inversible si et seulement si 0 est une valeur propre de  $A$ .
- Une matrice  $A$  carrée est inversible si et seulement si elle est diagonalisable.
- Les valeurs propres d'une matrice carrée sont sur sa diagonale.
- On trouve les valeurs propres de  $A$  en réduisant la matrice à sa forme échelonnée.

**Solution :** Vrai : a). Faux : b), c), d).

### Exercice 6

- Montrer que si  $\lambda$  est une valeur propre d'une matrice inversible  $A$  de taille  $n \times n$ , alors  $\lambda^{-1}$  est une valeur propre de  $A^{-1}$ . Trouver un vecteur propre correspondant.

**Solution :** Si  $\mathbf{v}$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , on a

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

La valeur propre  $\lambda$  est non nulle car la matrice  $A$  est inversible. On multiplie à gauche par  $\lambda^{-1}A^{-1}$ , et on obtient

$$\lambda^{-1}\mathbf{v} = A^{-1}\mathbf{v},$$

d'où le résultat.

- b) Montrer que  $A$  et  $A^T$  ont les mêmes valeurs propres. Montrer par un contre-exemple que les vecteurs propres de  $A$  et  $A^T$  ne sont pas les mêmes en général.

**Solution :** Le déterminant de la matrice  $A - \lambda I_n$  étant égal au déterminant de la transposée  $(A - \lambda I_n)^T = A^T - \lambda I_n$ , les matrices  $A$  et  $A^T$  ont donc le même polynôme caractéristique, et donc les mêmes valeurs propres (qui sont les racines du polynôme caractéristique).

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Les valeurs propres sont  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$  et les vecteurs propres associés sont  $\mathbf{v}_1 = (2 \ 1)^T, \mathbf{v}_2 = (-2 \ 1)^T$ . Par contre les vecteurs propres correspondants de la matrice  $A^T$  sont  $\mathbf{v}_1 = (1 \ 2)^T, \mathbf{v}_2 = (-1 \ 2)^T$ .

Remarque : bien sûr, si  $A$  est symétrique, les vecteurs propres de  $A$  et  $A^T$  sont les mêmes.

### Exercice 7

Dire si l'affirmation est vraie ou fausse : Si deux matrices  $A$  et  $B$  de taille  $n \times n$  ont les mêmes valeurs propres alors elles sont semblables.

**Solution :** Faux. Contre exemple :

$$A = I_2 ; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La seule valeur propre de  $B$  est 1, car  $B$  est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont égaux à 1. De même, la seule valeur propre de la matrice identité est 1. Pourtant,  $B$  n'est pas semblable à  $I_2$ , car la seule matrice semblable à  $I_2$  est  $I_2$  elle-même.

### Exercice 8

Soit  $A$  une matrice  $n \times n$ . Soit  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par  $T(\mathbf{x}) = \det(A_i(\mathbf{x}))$ , où  $A_i(\mathbf{x})$  est la matrice obtenue en remplaçant la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $A$  par le vecteur  $\mathbf{x}$ . Montrer que l'application est linéaire.

**Solution :** Une application  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est linéaire si

(a)  $T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{u} + \mathbf{v})$  pour tout  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,

(b)  $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$  pour tout  $\mathbf{u}$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $c$  dans  $\mathbb{R}$ .

On veut donc montrer que

(a)  $\det(A_i(\mathbf{u})) + \det(A_i(\mathbf{v})) = \det(A_i(\mathbf{u} + \mathbf{v}))$  pour tout  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,

(b)  $\det(A_i(c\mathbf{u})) = c \det(A_i(\mathbf{u}))$  pour tout  $\mathbf{u}$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $c$  dans  $\mathbb{R}$ .

On a vu au cours que le déterminant d'une matrice  $A$  d'ordre  $n$  peut être calculé par un développement selon n'importe quelle ligne ou encore n'importe quelle colonne. Nous pouvons donc écrire le développement par rapport à la  $i^{\text{ème}}$  colonne :

$$\det(A_i(\mathbf{x})) = \sum_{j=1}^n x_j C_{ij},$$

où  $C_{ij}$  pour  $j = 1, \dots, n$  sont les cofacteurs de  $A_i(\mathbf{x})$  (ou équivalentement de  $A$ ) par rapport à la  $i^{\text{ème}}$  colonne. Finalement on a

$$\underbrace{\sum_{j=1}^n \mathbf{u}_j C_{ij}}_{\det(A_i(\mathbf{u}))} + \underbrace{\sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j C_{ij}}_{\det(A_i(\mathbf{v}))} = \underbrace{\sum_{j=1}^n (\mathbf{u}_j + \mathbf{v}_j) C_{ij}}_{\det(A_i(\mathbf{u}+\mathbf{v}))}.$$

De la même façon

$$\underbrace{\sum_{j=1}^n (c\mathbf{u}_j) C_{ij}}_{\det(A_i(c\mathbf{u}))} = c \underbrace{\sum_{j=1}^n \mathbf{u}_j C_{ij}}_{c \det(A_i(\mathbf{u}))}.$$

## Partiellement en classe

### Exercice 9

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors les valeurs propres de  $A$  sont

- 2 et 7
- 3 et 4
- 5, -1 et 1
- 2 et 3

### Exercice 10

Quelles affirmations sont toujours vraies ?

- a Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées semblables. Alors  $A$  et  $B$  ont les mêmes valeurs propres.
- b Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées semblables. Alors  $A$  et  $B$  ont les mêmes vecteurs propres.
- c Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées qui ont les mêmes valeurs propres. Alors  $A$  et  $B$  sont semblables.
- d Soit  $A$  une matrice carrée.  $A$  et  $A^T$  ont les mêmes valeurs propres.

### Exercice 11

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 10 & 4 & -\ell \\ -4 & c & -2 \end{pmatrix},$$

avec les paramètres  $\ell, c \in \mathbb{R}$ . Alors, pour tout  $\ell \in \mathbb{R}$ ,  $-1$  est une valeur propre de la matrice  $A$  si

- $c = -2$
- $c = 8$
- $c = 1$
- $c = -1$

(plusieurs réponses correctes).

**Solution :**  $\det(A + I_3) = -(l - 10) \cdot (2c + 4)$  Donc, si  $c = -2, -1$  est valeur propre de  $A$  quel que soit  $l$ .

### Exercice 12

Soient  $a, b$  deux nombres réels tels que  $a + b = 1$  et  $A = \begin{pmatrix} 4a & 2 \\ 2 & 4b \end{pmatrix}$  une matrice non-inversible. Laquelle des affirmations suivantes doit être vraie ?

- $\det(A) = -4$
- $A$  est une matrice de changement de base
- le polynôme caractéristique de  $A$  a une seule racine réelle
- le polynôme caractéristique de  $A$  a deux racines réelles distinctes

### Exercice 13

Quelles affirmations sont toujours vraies ? (plusieurs réponses correctes)

- a Une matrice carrée a au moins une valeur propre réelle.
- b Une matrice de taille  $n \times n$  a au plus  $n$  valeurs propres différentes.
- c Soit  $A$  une matrice de taille  $n \times n$  et  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ . Alors la multiplicité algébrique de  $\lambda$  est toujours plus grande ou égale à la multiplicité géométrique de  $A$ .
- d Soit  $A$  une matrice carrée. Alors  $A$  est inversible si et seulement si  $0$  n'est pas une valeur propre de  $A$ .
- e Les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

sont 3, 1 et 4.

**Solution :**

- *Faux* : eg, une matrice de rotation dans  $\mathbb{R}^2$
- *Vrai*
- *Vrai*
- *Vrai*
- *Faux*

### Exercice 14

Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n \times n$  et soit  $P$  une matrice de taille  $n \times n$  telle que chacune des colonnes de  $P$  est un vecteur propre de la matrice  $A$ . Alors il est toujours vrai que

- $AP = PD$ , où  $D$  est une matrice diagonale
- $P$  est inversible et  $PAP^{-1}$  est une matrice diagonale
- $P$  est inversible et  $P^{-1}AP$  est une matrice diagonale
- $PA = DP$  où  $D$  est une matrice diagonale

### Exercice 15

Soit  $A$  une matrice de taille  $n \times n$  de rang  $m < n$ . Alors,

- 0 est valeur propre de  $A$  de multiplicité géométrique  $n - m$
- 0 est valeur propre de  $A$  de multiplicité algébrique  $n - m$
- 0 est une valeur propre de  $A$  de multiplicité algébrique  $> n - m$
- 0 n'est pas valeur propre de  $A$

### Exercice 16

Soit  $A$  une matrice de taille  $3 \times 3$  tel que le polynôme caractéristique de  $A$  est  $c_A(t) = (2-t)^3$ . Quelles affirmations sont toujours vraies ?

- $A$  est inversible.
- $A$  est diagonalisable.
- $\det(A) \neq 0$ .
- La seule valeur propre de  $A$  est 2.
- Aucune des affirmations ci-dessus n'est vraie.

(plusieurs réponses possibles)

### Exercice 17

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées de même taille. On suppose que  $B$  est une matrice inversible. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  et aussi de  $B$ . Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont toujours vraies ?

- $\lambda$  est une valeur propre de la matrice  $A + B$
- $\lambda$  est une valeur propre de la matrice  $AB$
- $\lambda$  est une valeur propre de la matrice  $BAB^{-1}$
- $\lambda^2$  est une valeur propre de la matrice  $BA$ .

---

Copyright 2012 © Prof. Assyr Abdulle, Prof. Simone Deparis, Dr. Christian Urech.  
Informations générales, séries et corrigés : cf.

<http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414>

Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.