Série 9

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

1. Calculer le polynome caracteristique.
2. Calculer les valeurs propres d'une matrice.
3. Calculer les vecteurs propres d'une matrice associé à une valeur propre
4. Construire une base d'un espace propre
5. Diagonaliser une matrice

Nouveau vocabulaire dans cette série

- Valeur propre, vecteur propre, espace propre
- Polynôme caractéristique
- Diagonalisation d'une matrice, matrice diagonalisable

La matrice D de l'exercice 1 sera traité en classe.

Exercice 1

Soient

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$

et $E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 17 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les vecteurs propres de chacune de ces matrices A, B, C, D, E.

Exercice 2

Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$.

Exercice 3

Soit A une matrice de taille $n \times n$ et $k \geq 2$ un entier. Montrer que si λ est une valeur propre de A avec pour vecteur propre $\mathbf{v}$, alors λ^k est une valeur propre de

$$A^k = \underbrace{A\,A\,\cdots\,A}_{k \text{ fois}}$$

avec pour vecteur propre $\mathbf{v}$.

Exercices supplémentaires

Exercice 4

Montrer :

a) Si A est une matrice inversible, alors $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

b) Si A et Q sont des matrices inversibles de taille $n \times n$, alors $\det\left(QAQ^{-1}\right) = \det A$.

c) Si U est une matrice carrée de taille $n \times n$ telle que $U^T U = I_n$, alors $\det U = \pm 1$.

d) Si A est une matrice carrée telle que $\det A^3 = 0$, alors A est non inversible.

Exercice 5

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) La matrice A n'est pas inversible si et seulement si 0 est une valeur propre de A.

b) Une matrice A carrée est inversible si et seulement si elle est diagonalisable.

c) Les valeurs propres d'une matrice carrée sont sur sa diagonale.

d) On trouve les valeurs propres de A en réduisant la matrice à sa forme échelonnée.

Exercice 6

a) Montrer que si λ est une valeur propre d'une matrice inversible A de taille $n \times n$, alors λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1}. Trouver un vecteur propre correspondant.

b) Montrer que A et A^T ont les mêmes valeurs propres. Montrer par un contre-exemple que les vecteurs propres de A et A^T ne sont pas les mêmes en général.

Exercice 7

Dire si l'affirmation est vraie ou fausse : Si deux matrices A et B de taille $n \times n$ ont les mêmes valeurs propres alors elles sont semblables.

Exercice 8

Soit A une matrice $n \times n$. Soit $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'application définit par $T(\mathbf{x}) = \det(A_i(\mathbf{x}))$, où $A_i(\mathbf{x})$ est la matrice obtenue en remplaçent la $i^{\text{ème}}$ colonne de A par le vecteur $\mathbf{x}$. Montrer que l'application est linéaire.

Partiellement en classe

Exercice 9

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors les valeurs propres de A sont

- ☐ -2 et 7
- ☐ 3 et 4
- ☐ -5, -1 et 1
- ☐ -2 et 3

Exercice 10

Quelles affirmations sont toujours vraies ?

a Soient A et B deux matrices carrées semblables. Alors A et B ont les mêmes valeurs propres.

b Soient A et B deux matrices carrées semblables. Alors A et B ont les mêmes vecteurs propres.

c Soient A et B deux matrices carrées qui ont les mêmes valeurs propres. Alors A et B sont semblables.

d Soit A une matrice carrée. A et A^T ont les mêmes valeurs propres.

Exercice 11

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 10 & 4 & -\ell \\ -4 & c & -2 \end{pmatrix},$$

avec les paramètres $\ell, c \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $\ell \in \mathbb{R}$, -1 est une valeur propre de la matrice A si

- ☐ $c = -2$
- ☐ $c = 8$
- ☐ $c = 1$
- ☐ $c = -1$

(plusieures réponses correctes).

Exercice 12

Soient a, b deux nombres réels tels que $a + b = 1$ et $A = \begin{pmatrix} 4a & 2 \\ 2 & 4b \end{pmatrix}$ une matrice non-inversible. Laquelle des affirmations suivantes doit être vraie ?

- ☐ $\det(A) = -4$
- ☐ A est une matrice de changement de base
- ☐ le polynôme caractéristique de A a une seule racine réelle
- ☐ le polynôme caractéristique de A a deux racines réelles distinctes

Exercice 13

Quelles affirmations sont toujours vraies ? (plusieurs réponses correctes)

a Une matrice carrée a au moins une valeur propre réelle.

b Une matrice de taille $n \times n$ a au plus n valeurs propres différentes.

c Soit A une matrice de taille $n \times n$ et λ une valeur propre de A. Alors la multiplicité algébrique de λ est toujours plus grande où égale à la multiplicité géométrique de A.

d Soit A une matrice carrée. Alors A est inversible si et seulement si 0 n'est pas une valeur propre de A.

e Les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

sont 3, 1 et 4.

Exercice 14

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$ et soit P une matrice de taille $n \times n$ telle que chacune des colonnes de P est un vecteur propre de la matrice A. Alors il est toujours vrai que

- ☐ $AP = PD$, où D est une matrice diagonale
- ☐ P est inversible et PAP^{-1} est une matrice diagonale
- ☐ P est inversible et $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale
- ☐ $PA = DP$ où D est une matrice diagonale

Exercice 15

Soit A une matrice de taille $n \times n$ de rang $m < n$. Alors,

- ☐ 0 est valeur propre de A de multiplicité géométrique $n - m$
- ☐ 0 est valeur propre de A de multiplicité algébrique $n - m$
- ☐ 0 est une valeur propre de A de multiplicité algébrique $\geq n - m$
- ☐ 0 n'est pas valeur propre de A

Exercice 16

Soit A une matrice de taille 3×3 tel que le polynôme caractéristique de A est $c_A(t) = (2-t)^3$. Quelles affirmations sont toujours vraies ?

- ☐ A est inversible.
- ☐ A est diagonalisable.
- ☐ $\det(A) \neq 0$.
- ☐ La seule valeur propre de A est 2.
- ☐ Aucune des affirmations ci-dessus n'est vraie.

(plusieures réponses possibles)

Exercice 17

Soient A et B deux matrices carrées de même taille. On suppose que B est une matrice inversible. Soit λ une valeur propre de A et aussi de B. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont toujours vraies ?

- ☐ λ est une valeur propre de la matrice $A + B$
- ☐ λ est une valeur propre de la matrice AB
- ☐ λ est une valeur propre de la matrice BAB^{-1}
- ☐ λ^2 est une valeur propre de la matrice BA.

Informations générales, séries et corrigés : cf.
http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414
Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications.* De Boeck, Bruxelles, 2005.