

## Série 8

### Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

1. Calculer le déterminant d'une matrice.
2. Appliquer les propriétés du déterminant.

### Nouveau vocabulaire dans cette série

- déterminant d'une matrice

### Exercice 1

Dire si l'affirmation suivante est vraie ou fausse : Une transformation matricielle définie par une matrice  $A$  est toujours bijective lorsque son domaine (ensemble de départ) est égal à  $\text{Lign}A$  et son codomaine (ensemble d'arrivé) est égal à  $\text{Col}A$ .

### Exercice 2

Calculer, en faisant le moins de calculs possible, les déterminants des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Indication : Calculez  $\det A$  en utilisant le développement par rapport à la première colonne. Retrouvez les autres matrices en faisant des opérations sur les lignes de  $A$  et utilisez les propriété du déterminant.*

### Exercice 3

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Pour quelles valeurs de  $a$  la matrice  $A$  est-elle inversible ?

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -3a \\ 0 & 3 & 3 & 2a \end{pmatrix} \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$$

#### Exercice 4

Pour quelles valeurs de  $c_1, c_2, c_3$  la matrice suivante est-elle inversible ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \end{pmatrix}$$

*Indication : Montrer que  $\det A = (c_2 - c_1)(c_3 - c_1)(c_3 - c_2)$ .*

#### Exercice 5

Calculer le déterminant des matrices élémentaires suivantes. Indiquer à quelle opération élémentaire chaque matrice correspond.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

#### Exercice 6

Soient  $A$  et  $B$  des matrices de taille  $n \times n$ . Montrer que si  $A$  ou  $B$  est non inversible, alors  $AB$  est non inversible.

#### Exercice 7

a) Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

b) Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a+b & a+b & a+b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & a+b & c \\ a & b & a \end{vmatrix}.$$

c) Calculer le déterminant de la matrice suivante. Comment le déterminant dépend-t-il de l'angle  $\varphi$ ? Pourquoi?

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

d) Soient  $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 18 & 17 & 23 \\ 49 & 1 & 72 & 10 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 18 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 18 \end{pmatrix}$ . Calculer  $\det(AB)$ .

### Exercice 8

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- a) Si  $B$  est obtenue en intervertissant deux lignes de  $A$ , alors  $\det B = \det A$ .
- b) Si les colonnes de  $A$  sont linéairement dépendantes, alors  $\det A = 0$ .
- c) Le déterminant de  $A$  est le produit des éléments diagonaux de  $A$ .
- d) Soit  $A$  une matrice carrée telle que  $\det(A^{13}) = 0$ . Alors  $A$  est inversible.

## Exercices optionnels

### Exercice 9

Soient  $A, B, C \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  des matrices telles que  $B$  est inversible et :

$$\begin{cases} \det(A) &= \det(B^3) \\ \det(C) &= \det(B^{-1}) \\ \det(ABC) &= 8 \end{cases}$$

Que valent  $\det(A)$ ,  $\det(B)$  et  $\det(C)$  ?

### Exercice 10

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- (a) Si deux lignes d'une matrice de taille  $7 \times 7$  sont les mêmes, alors  $\det A = 0$ .
- (b) Si  $A$  est une matrice carrée dont le déterminant vaut 2, alors  $\det(A^3) = 6$ .
- (c) Si  $A$  et  $B$  sont des matrices de taille  $n \times n$  telles que  $\det A = 2$  et  $\det B = 5$ , alors  $\det(A + B) = 7$ .
- (d) Si  $A$  est une matrice carrée triangulaire inférieure, alors  $A$  est inversible.

### Exercice 11

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- a) Si une matrice  $A$  est triangulaire inférieure, alors son déterminant s'obtient comme le produit des éléments de sa diagonale.
- b)  $\det A^T = -\det A$  pour toute matrice carrée  $A$ .
- c) Dans certains cas, il se peut que l'inverse d'une matrice  $A$  existe même si  $\det A = 0$ .
- d) Soient  $A$  une matrice  $n \times n$  et  $k \in \mathbb{R}^*$ . Alors,  $\det(kA) = k^n \det A$ .

## Partiellement en classe

### Exercice 12

Soit  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ . Montrer que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ .

### Exercice 13

a) Calculer le déterminant des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Même question pour  $A^T, B^T, C^T, D^T, E^T$ .

### Exercice 14

Soit  $A$  une matrice  $n \times n$ . Montrer que si deux lignes de  $A$  sont identiques, alors  $\det(A) = 0$ .  
Que peut-on dire si deux colonnes sont identiques ?

### Exercice 15

Soit  $A$  une matrice  $n \times n$ . Montrer que si deux lignes de  $A$  sont identiques, alors  $\det(A) = 0$ .  
Que peut-on dire si deux colonnes sont identiques ?

### Exercice 16

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices inversibles de taille  $n \times n$ . Alors le nombre

$$\det(A^{-1}) \det(A + B) \det(B^{-1})$$

A est égal à 2.

B est égal à  $\det(B^{-1}) + \det(A^{-1})$ ,

C n'est pas défini car la matrice  $A + B$  n'est pas forcément inversible.

D est égal à  $\det(B^{-1} + A^{-1})$ .

(Une seule réponse correcte.)

### Exercice 17

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices inversibles de taille  $n \times n$ . Alors le nombre

$$\frac{\det(A^T) + \det(B^T)}{\det(A) \det(B)}$$

A est égal à  $\det(A^T - A) + \det(B^T - B)$

B est égal à  $\det(B^{-1}) + \det(A^{-1})$

C est égal à  $\det(B^{-1} + A^{-1})$

D est égal à  $\frac{1}{\det(B)} - \frac{1}{\det(A)}$

### Exercice 18

Le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \alpha & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

est

- A. -2
- B.  $2 - \alpha$
- C.  $-2 - \alpha$
- D. 2

---

Copyright 2012 © Prof. Assyr Abdulle, Prof. Simone Deparis, Dr. Christian Urech.  
Informations générales, séries et corrigés : cf.

<http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414>

Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.