# Série 7 (Corrigé)

**Objectifs de cette série**

À la fin de cette série vous devriez être capable de

1. Lien entre applications linéaires et matrices.
2. Composition d'applications linéaires et multiplication de deux matrices.
3. Transformations linéaires
4. Coordonné, matrice associée à une transformation linéaire, et matrice de changement de base

**Nouveau vocabulaire dans cette série**

- transformation linéaire
- matrice de $T$ par rapport à ...
- Changement de base

### Exercice 1

Trouver les matrices correspondant aux transformations linéaires suivantes (exprimées dans la base canonique) :

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

***Solution :*** *Comme vu au cours, si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application lineaire, alors il existe une unique matrice $A$ de taille $m \times n$ telle que*

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad \textit{pour tout } \mathbf{x} \textit{ dans } \mathbb{R}^n.$$

*Plus précisément, la $j^e$ colonne de $A$ est le vecteur $T(\mathbf{e}_j)$, où $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ est la base canonique.*

*a)* $A = \begin{pmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

*b)* $A = \begin{pmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

*c)* $A = \begin{pmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & T(\mathbf{e}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

**Exercice 2**

a) Soit $A$ une matrice $5 \times 6$. Si $\dim \operatorname{Ker} A = 3$, quel est le rang de $A$ ?

***Solution :*** *On considère l'application linéaire associée de* $\mathbb{R}^6$ *dans* $\mathbb{R}^5$*. Le théorème du rang donne*

$$\operatorname{rg}(A) + \dim \operatorname{Ker} A = 6 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 3.$$

b) Soit $A$ une matrice $7 \times 3$. Quel est le rang maximum de $A$ ? Quelle est la dimension minimum de $\operatorname{Ker} A$ ? Même question si $A$ est une matrice $3 \times 7$.

***Solution :***

*Si A est de taille* $7 \times 3$*, alors* $\operatorname{rg}(A) + \dim \operatorname{Ker} A = 3$*. Le rang maximum est* $3$ *et la dimension minimum du noyau est* $0$*.*

*Si A est de taille* $3 \times 7$ *, le rang maximum est* $3$*. Comme* $\operatorname{rg}(A) + \dim \operatorname{Ker} A = 7$*, la dimension minimum du noyau est* $4$*.*

c) Soit $A$ une matrice $n \times n$. Donner une condition sur $\operatorname{rg}(A)$ pour que $A^T$ soit inversible.

***Solution :*** $A^T$ *est inversible* $\Leftrightarrow$ $A$ *est inversible* $\Leftrightarrow \operatorname{rg}(A) = n$*.*

d) Soit $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une transformation linéaire telle que $\mathbf{T} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{T} = \mathbf{I}_3$ (application identité). Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker} \mathbf{T}$ ?

***Solution :*** *On a*

$$3 = \operatorname{rg}(\mathbf{I}_3) = \operatorname{rg}(\mathbf{T} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{T}).$$

*Ainsi,* $\operatorname{Ker}(\mathbf{T} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{T}) = \{\mathbf{0}\}$*. Comme*

$$\mathbf{v} \in \operatorname{Ker} \mathbf{T} \Rightarrow \mathbf{v} \in \operatorname{Ker}(\mathbf{T} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{T}),$$

*on obtient* $\dim \operatorname{Ker} \mathbf{T} = 0$*.*

**Exercice 3**

Soient $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ et $C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$. On suppose $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Donner la matrice de changement de base (matrice de passage) de la base $C$ vers la base $B$.

***Solution :*** *$P_{BC}$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de $\mathbf{c}_1$ et $\mathbf{c}_2$ dans la base $B$ : $P_{BC} = ([\mathbf{c}_1]_B\ [\mathbf{c}_2]_B)$. Il faut donc résoudre deux sytèmes linéaires afin de trouver $[\mathbf{c}_i]_B$, $i = 1, 2$ :*

$$\mathbf{c}_i = x_{1i}\mathbf{b}_1 + x_{2i}\mathbf{b}_2 = (\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2)\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \end{pmatrix}.$$

*Ainsi, $P_{BC}$ est la solution de*

$$(\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2)P_{BC} = (\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2).$$

*Si on désigne par $E$ la base canonique, cela peut aussi être interprété comme $P_{EB}P_{BC} = P_{EC}$. Pour résoudre ce système linéaire, on échelonne et on réduit la matrice $(\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2)$ augmentée avec les vecteurs $\mathbf{c}_1$ et $\mathbf{c}_2$ :*

$$(\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2|\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \end{array}\right).$$

*Ainsi, la matrice de passage cherchée est $P_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$.*

b) Donner la matrice de changement de base (matrice de passage) de la base $B$ vers la base $C$.

***Solution :*** *On a $P_{CB} = P_{BC}^{-1}$, d'où la matrice cherchée est $P_{CB} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$.*

c) Si $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ est tel que $[\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, calculer $[\mathbf{v}]_C$.

***Solution :*** $[\mathbf{v}]_C = P_{CB}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

d) À présent, si $[\mathbf{v}]_C = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$, calculer $[\mathbf{v}]_B$.

***Solution :*** $[\mathbf{v}]_B = P_{BC}\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix}$.

## Exercice 4

Soit $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une transformation linéaire. Montrer qu'une condition nécessaire pour que $\mathbf{T}$ soit bijective est $n = m$.

***Solution :***

*Supposons $\mathbf{T}$ bijective. Considérons $A$ la matrice canonique associée à $\mathbf{T}$. Comme $\mathbf{T}$ est surjective (l'image de $\mathbf{T}$ recouvre tout $\mathbb{R}^m$), l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possède une solution pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, et les colonnes de $A$ engendrent $\mathbb{R}^m$, ainsi on a $n \geq m$. Comme $\mathbf{T}$ est injective, l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ possède uniquement la solution triviale, ce qui signifie que les colonnes de $A$ sont linéairement indépendantes. Ceci implique $n \leq m$. On a donc $n = m$.*

**Exercice 5**

Dans les cas suivants, écrire la matrice canonique correspondant à la transformation, et déterminer si la transformation est injective, surjective ou bijective.

a) $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 + x_3$

c) $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

e) $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$

f) $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

***Solution :***

*a)* $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *, injective (les colonnes sont linéairement indépendantes). Non surjective, car seulement deux vecteurs ne peuvent engendrer* $\mathbb{R}^3$*. Donc non bijective.*

*b)* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *, surjective (l'image est* $\mathbb{R}$*), non injective (plus de colonnes que de lignes). Donc non bijective.*

*c)* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *, injective, surjective et bijective (en permutant les lignes 1 et 3, on trouve la matrice identité).*

*d)* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *, rien (non injective car* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *est envoyé sur zéro, et non surjective, car les vecteurs de l'image satisfont* $x_1 = x_2$*).*

*e)* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *, injective, surjective et bijective.*

*f)* $\mathbf{T}$ *n'est pas une transformation linéaire, il est impossible de la représenter canoniquement par une matrice.*

## Partiellement en classe mardi

### Exercice 6

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

(a) Soient $V$ un espace vectoriel et $H$ un sous-espace vectoriel de $V$. Alors $V$ est un sous-espace vectoriel de lui-même (ou d'un espace vectoriel plus grand) et $H$ est un espace vectoriel.

(b) Si $H$ est un sous-ensemble d'un espace vectoriel $V$, alors il suffit que $0_V$ soit dans $H$ pour que $H$ soit un sous-espace vectoriel de $V$.

(c) Une matrice carrée $A$ est inversible si et seulement si $\text{Ker}(A) = \{\mathbf{0}\}$.

(d) Le noyau d'une matrice $A$ n'est pas nécessairement un espace vectoriel.

***Solution :*** *Vrai : (a), (c). Faux : (b), (d).*

### Exercice 7

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Si une matrice $A$ est de taille $m \times n$ alors l'image de la transformation $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ est contenue dans $\mathbb{R}^n$.

b) Chaque transformation linéaire est une transformation matricielle.

c) La transformation $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = mx^2 + b$ est linéaire pour $b = 0$.

d) Une transformation linéaire préserve les opérations d'addition vectorielle et de multiplication par un scalaire.

***Solution :*** *Vrai : d). Faux : a), b), c).*

***Solution détaillée pour b) :*** *Rappel de définitions :*

*i) Soient $m, n \geq 1$ entiers. Une transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est appelée* transformation matricielle *s'il existe une matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ telle que $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.*

*ii) Soient $V, W$ deux espaces vectoriels réels. Une transformation $T : V \to W$ est appelée* transformation linéaire *si $T$ satisfait*

$$T(u + v) = T(u) + T(v), \quad T(\lambda u) = \lambda T(u), \qquad \textit{pour tous } u, v \in V, \lambda \in \mathbb{R}.$$

*Les relations entre transformations matricielles et transformations linéaires sont résumées ci-dessous :*

- *Chaque transformation matricielle est une transformation linéaire.*
- *Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une transformation linéaire, alors il existe une unique matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ telle que $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. En effet, la transformation linéaire $T$ est une transformation matricielle.*

- *Soit $T : V \to W$ une transformation linéaire, où $V, W$ sont des espaces vectoriels réels de dimension finie. En choisissant des bases de $V$ et $W$ et en introduisant les systèmes de coordonnées par rapport à ces deux bases, la transformation $T$ dans ces systèmes de coordonnées peut être représentée par une matrice.*

- *Soit $T : V \to W$ une transformation linéaire, où l'un des espaces vectoriels $V, W$ est de dimension infinie. Dans ce cas, il n'existe pas de représentation matricielle de la transformation linéaire $T$.*

*Ce dernier point est illustré par l'exemple suivant : soit $C([0,1])$ l'ensemble des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Définissons la transformation*

$$T : C([0,1]) \to \mathbb{R} \quad \textit{telle que} \quad T(f) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

*Nous observons que*

- *l'ensemble $C([0,1])$ forme un espace vectoriel réel de dimension infinie. L'ensemble des polynômes, de base $\{1, t, t^2, t^3, \dots\}$, est un sous-espace vectoriel et sa dimension n'est pas finie ;*

- *la transformation $T$ est linéaire.*

### Exercice 8

Calculer les produits matriciels suivants, et indiquer les compositions correspondantes d'applications linéaires, avec les dimensions des espaces, $\mathbf{T}_{AB} : \mathbb{R}^{\cdots} \underset{\mathbf{T}_{\dots}}{\to} \mathbb{R}^{\cdots} \underset{\mathbf{T}_{\dots}}{\to} \mathbb{R}^{\cdots}$.

(a) $AB$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

***Solution :*** $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{T}_{AB} : \mathbb{R}^3 \underset{\mathbf{T}_B}{\to} \mathbb{R}^2 \underset{\mathbf{T}_A}{\to} \mathbb{R}^3$.

(b) $ABC$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

***Solution :*** $ABC = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$, $\mathbf{T}_{ABC} : \mathbb{R}^2 \underset{\mathbf{T}_C}{\to} \mathbb{R}^3 \underset{\mathbf{T}_B}{\to} \mathbb{R}^2 \underset{\mathbf{T}_A}{\to} \mathbb{R}^2$.

(c) $ABC$, où $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

***Solution :*** $ABC = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{T}_{ABC} : \mathbb{R}^3 \underset{\mathbf{T}_C}{\to} \mathbb{R}^3 \underset{T_B}{\to} \mathbb{R} \underset{\mathbf{T}_A}{\to} \mathbb{R}^3$.

**Exercice 9**

Soient $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, et $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 + x_3$.

(a) Écrire les matrices canoniques associées à $T_1$ et $T_2$ et le produit matriciel associé à la composition $T_2 \circ T_1$ telle que $T_2 \circ T_1(\mathbf{x}) = T_2(T_1(\mathbf{x}))$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

***Solution :*** *$T_1(\boldsymbol{e}_1) = T_1(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T_1(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.*

*De même $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.*

*Ainsi la composition $T_2 \circ T_1$ correspond à $A_2A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$.*

(b) Quel est le domaine de définition de $T_2 \circ T_1$ ? Quel est le domaine d'arrivée ?

***Solution :*** *On a $T_2 \circ \mathbf{T}_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Le domaine de définition est $\mathbb{R}^2$. Le domaine d'arrivée est $\mathbb{R}$.*

# Partiellement en classe jeudi

**Exercice 10**

Soient $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{B} = (t^2 - 1, t+1, t-1)$ et $\mathcal{C} = (1, t, t^2)$ deux bases de $V$. Soit $T : V \to V$, $T(p) = p'(t)t + p(0)$.

(a) Calculer les matrices de passage $P_{\mathcal{BC}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{BC}}$ et $P_{\mathcal{CB}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{CB}}$

(b) Calculer la matrice de $T$ par rapport à la base $\mathcal{C}$ (ensemble de départ et d'arrivé).

(c) Calculer la matrice de $T$ par rapport à la base $\mathcal{B}$ (ensemble de départ et d'arrivé).

***Solution :***

*(a)*

$$P_{\mathcal{CB}} = ([b_1]_{\mathcal{C}} \cdots [b_n]_{\mathcal{C}}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*(b)*

$$P_{\mathcal{BC}} = P_{\mathcal{CB}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

*(c) $T(1) = 1; T(t) = t; T(t^2) = 2t^2$, donc, avec*

$$[T]_{CC} = ([T(c_1)]_C [T(c_2)]_C [T(c_3)]_C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

*(d)*

$$[T]_{\mathcal{BB}} = P_{\mathcal{BC}}[T]_{CC}P_{\mathcal{CB}} = P_{\mathcal{CB}}^{-1}[T]_{\mathcal{CC}}P_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*Vérification :*

$$T(b_1) = 2t^2 - 1 = 2b_1 + \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{2}b_1, \quad T(b_2) = t + 1 = b_2 \quad T(b_3) = t + 1 = b_3$$

**Exercice 11**

Soient $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ deux matrices semblables. Quelles affirmations sont toujours vraies ?

A. $\ker(A) = \ker(B)$

B. $\dim(\ker(A)) = \dim(\ker(B))$

C. $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Col}(B)$

D. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$

**Exercice 12**

Soit $A$ une matrice $m \times n$ et $T_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'application linéaire donnée par $v \mapsto Av$. Soient $A'$ une matrice $m \times n$ ligne-équivalente à $A$ et $T_{A'} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'application linéaire donnée par $v \mapsto A'v$.

Quelles affirmations sont toujours vraies ?

A. $\ker T_A = \ker T_{A'}$.

B. $\dim(\ker T_A) = \dim(\ker T_{A'})$.

C. $\mathrm{im}\, T_A = \mathrm{im}\, T_{A'}$.

D. $\dim(\mathrm{im}\, T_A) = \dim(\mathrm{im}\, T_{A'})$.

E. Aucunes des affirmations ci-dessus.

**Exercice 13**

Soit $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Calculer la matrice de passage $P_{\mathcal{BE}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{BE}}$ et la matrice de passage $P_{\mathcal{EB}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{EB}}$.

---

`http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414`
Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications.* De Boeck, Bruxelles, 2005.