Série 7

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

1. Lien entre applications linéaires et matrices.
2. Composition d'applications linéaires et multiplication de deux matrices.
3. Transformations linéaires
4. Coordonné, matrice associée à une transformation linéaire, et matrice de changement de base

Nouveau vocabulaire dans cette série

- transformation linéaire
- matrice de T par rapport à ...
- Changement de base

Exercice 1

Trouver les matrices correspondant aux transformations linéaires suivantes (exprimées dans la base canonique) :

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Exercice 2

a) Soit A une matrice 5×6. Si $\dim \operatorname{Ker} A = 3$, quel est le rang de A ?

b) Soit A une matrice 7×3. Quel est le rang maximum de A ? Quelle est la dimension minimum de $\operatorname{Ker} A$? Même question si A est une matrice 3×7.

c) Soit A une matrice $n \times n$. Donner une condition sur $\mathrm{rg}(A)$ pour que A^T soit inversible.

d) Soit $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une transformation linéaire telle que $\mathbf{T} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{T} = \mathbf{I}_3$ (application identité). Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker} \mathbf{T}$?

Exercice 3

Soient $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ et $C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$. On suppose $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Donner la matrice de changement de base (matrice de passage) de la base C vers la base B.

b) Donner la matrice de changement de base (matrice de passage) de la base B vers la base C.

c) Si $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ est tel que $[\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, calculer $[\mathbf{v}]_C$.

d) À présent, si $[\mathbf{v}]_C = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$, calculer $[\mathbf{v}]_B$.

Exercice 4

Soit $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une transformation linéaire. Montrer qu'une condition nécessaire pour que $\mathbf{T}$ soit bijective est $n = m$.

Exercice 5

Dans les cas suivants, écrire la matrice canonique correspondant à la transformation, et déterminer si la transformation est injective, surjective ou bijective.

a) $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 + x_3$

c) $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

e) $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$

f) $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

Partiellement en classe mardi

Exercice 6

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

(a) Soient V un espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de V. Alors V est un sous-espace vectoriel de lui-même (ou d'un espace vectoriel plus grand) et H est un espace vectoriel.

(b) Si H est un sous-ensemble d'un espace vectoriel V, alors il suffit que 0_V soit dans H pour que H soit un sous-espace vectoriel de V.

(c) Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\mathrm{Ker}(A) = \{\mathbf{0}\}$.

(d) Le noyau d'une matrice A n'est pas nécessairement un espace vectoriel.

Exercice 7

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Si une matrice A est de taille $m \times n$ alors l'image de la transformation $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ est contenue dans $\mathbb{R}^n$.

b) Chaque transformation linéaire est une transformation matricielle.

c) La transformation $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = mx^2 + b$ est linéaire pour $b = 0$.

d) Une transformation linéaire préserve les opérations d'addition vectorielle et de multiplication par un scalaire.

Exercice 8

Calculer les produits matriciels suivants, et indiquer les compositions correspondantes d'applications linéaires, avec les dimensions des espaces, $\mathbf{T}_{AB} : \mathbb{R}^{\cdots} \underset{\mathbf{T}_{\cdots}}{\rightarrow} \mathbb{R}^{\cdots} \underset{\mathbf{T}_{\cdots}}{\rightarrow} \mathbb{R}^{\cdots}$.

(a) AB, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(b) ABC, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) ABC, où $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9

Soient $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, et $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 + x_3$.

(a) Écrire les matrices canoniques associées à T_1 et T_2 et le produit matriciel associé à la composition $T_2 \circ T_1$ telle que $T_2 \circ T_1(\mathbf{x}) = T_2(T_1(\mathbf{x}))$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

(b) Quel est le domaine de définition de $T_2 \circ T_1$? Quel est le domaine d'arrivée ?

Partiellement en classe jeudi

Exercice 10

Soient $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{B} = (t^2-1, t+1, t-1)$ et $\mathcal{C} = (1, t, t^2)$ deux bases de V. Soit $T : V \to V$, $T(p) = p'(t)t + p(0)$.

(a) Calculer les matrices de passage $P_{\mathcal{BC}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{BC}}$ et $P_{\mathcal{CB}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{CB}}$

(b) Calculer la matrice de T par rapport à la base $\mathcal{C}$ (ensemble de départ et d'arrivé).

(c) Calculer la matrice de T par rapport à la base $\mathcal{B}$ (ensemble de départ et d'arrivé).

Exercice 11

Soient $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ deux matrices semblables. Quelles affirmations sont toujours vraies ?

A. $\ker(A) = \ker(B)$

B. $\dim(\ker(A)) = \dim(\ker(B))$

C. $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Col}(B)$

D. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$

Exercice 12

Soit A une matrice $m\times n$ et $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'application linéaire donnée par $v \mapsto Av$. Soient A' une matrice $m \times n$ ligne-équivalente à A et $T_{A'} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'application linéaire donnée par $v \mapsto A'v$.

Quelles affirmations sont toujours vraies ?

A. $\ker T_A = \ker T_{A'}$.

B. $\dim(\ker T_A) = \dim(\ker T_{A'})$.

C. $\mathrm{im}\, T_A = \mathrm{im}\, T_{A'}$.

D. $\dim(\mathrm{im}\, T_A) = \dim(\mathrm{im}\, T_{A'})$.

E. Aucunes des affirmations ci-dessus.

Exercice 13

Soit $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Calculer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ et la matrice de passage $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$.

Informations générales, séries et corrigés : cf.
`http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414`
Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications.* De Boeck, Bruxelles, 2005.