Algèbre linéaire inversée
Prof. Simone Deparis

Jeudi 16 octobre 2025
EPFL

Série 6 (Corrigé)

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

1. calculer le noyau et image d'une application linéaire.
2. transformations injective et surjective
3. matrice associée à une transformation linéaire
4. théorème du rang

Nouveau vocabulaire dans cette série

- transformation linéaire
- matrice de T par rapport à ...
- noyau et image d'une tranformation linéaire

Exercice 1

On appelle *trace* d'une matrice carrée A, et l'on note $\operatorname{tr}(A)$, la somme des éléments diagonaux de A. Soit $\mathcal{M}_{n\times n}$ l'espace vectoriel des matrices de tailles $n \times n$.

(i) Montrer que l'application $\operatorname{tr}\colon \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \operatorname{tr}(A)$ est une application linéaire.

(ii) Calculer la dimension de $\operatorname{Ker}(\operatorname{tr})$.

(ii) Montrer que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ pour toutes les matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$.

Solution : *En général on peut écrire*

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

(i) L'application $\operatorname{tr}\colon \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbb{R}$ *est linéaire si pour toutes* A *et* B *dans* $\mathcal{M}_{n\times n}$ *et tous* λ *dans* $\mathbb{R}$ *on a*

$$\operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(A+B) \quad \textit{et} \quad \operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr}(A).$$

En effet,

$$\operatorname{tr}(A+B) = \sum_{i=1}^{n} (A+B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}}_{\operatorname{tr}(A)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_{ii}}_{\operatorname{tr}(B)} = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B),$$

$$\operatorname{tr}(\lambda A) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda A)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ii} = \lambda \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}}_{\operatorname{tr}(A)} = \lambda \operatorname{tr}(A).$$

(ii) Par le théorème du rang on sait que

$$\dim \mathrm{Im}(\mathrm{tr}) + \dim \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) = \dim \mathcal{M}_{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}.$$

Premièrement, $\mathcal{M}_{n\times n}$ est l'ensemble formé des matrices avec $n \times n = n^2$ éléments, donc $\dim \mathcal{M}_{n\times n} = n^2$. De plus, l'image de tr est l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}$ de la forme $\mathrm{tr}(A)$ avec A dans $\mathcal{M}_{n\times n}$. Donc $\dim \mathrm{Im}(\mathrm{tr}) = 1$. Finalement, on a que

$$\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) = n^2 - 1.$$

(iii) En effet, en utilisant la définition de multiplication des matrices, on a

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}(BA)_{jj} = \mathrm{tr}(BA).$$

Exercice 2

Soient V et W deux espaces vectoriels, et $T : V \to W$ une transformation linéaire. Montrer que si $U \subset V$ est un sous-espace vectoriel, alors l'ensemble image $T(U)$ est un sous-espace vectoriel de W.
Solution : *On doit prouver (i) si $w \in T(U)$ et α est un scalaire, alors $\alpha w \in T(U)$ et (ii) si $w_1 \in T(U)$ et $w_2 \in T(U)$ alors $w_1 + w_2 \in T(U)$, et (iii) $T(U)$ contient 0_W.*

(i) En effet : $w \in T(U) \Leftrightarrow w = T(u)$ pour un certain $u \in U$. Ainsi, en utilisant la linéarité de T, $\alpha w = \alpha T(u) = T(\alpha u) \in T(U)$ ($\alpha u \in U$ car U est un s.e.v. de V, donc fermé pour la multiplication par un scalaire). (ii) De même, $w_1 + w_2 = T(u_1) + T(u_2) = T(u_1 + u_2) \in T(U)$ (U est fermé pour l'addition). (iii) On a $0_V \in U$ car U s.e.v. de V et $T(0_V) = 0_W$ par linéarité de T, donc $0_W \in T(U)$ (car il existe $u = 0_V \in U$ tel que $0_W = T(u)$).

Exercice 3

Soient A et B deux matrices de taille $m \times n$ telles que $A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$ pour tout vecteur $\mathbf{x}$ dans $\mathbb{R}^n$. Démontrer que $A = B$.
Solution : *Soient $A = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ et $B = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$, où $\mathbf{a}_i$ et $\mathbf{b}_i$ sont des vecteurs dans $\mathbb{R}^m$ pour tous $i = 1, \ldots, n$. Alors, pour tout vecteur $\mathbf{x}$ dans $\mathbb{R}^n$, on peut écrire*

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots x_n\mathbf{a}_n \quad \textit{et} \quad B\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \ldots x_n\mathbf{b}_n,$$

où $x_1, \ldots, x_n$ sont les composantes de $\mathbf{x}$. Les j^e composantes de $A\mathbf{x}$ et $B\mathbf{x}$ s'écrivent comme de suite

$$(A\mathbf{x})_j = x_1\mathbf{a}_{1j} + x_2\mathbf{a}_{2j} + \ldots x_n\mathbf{a}_{nj} \quad \textit{et} \quad (B\mathbf{x})_j = x_1\mathbf{b}_{1j} + x_2\mathbf{b}_{2j} + \ldots x_n\mathbf{b}_{nj},$$

où $\mathbf{a}_{ij}$ et $\mathbf{b}_{ij}$ indiquent la j^e composante de la i^e colonne de A et B, respectivement. Donc, si $A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$, alors on a

$$(A\mathbf{x})_j = (B\mathbf{x})_j, \quad \textit{pour tout } j = 1, \ldots, m.$$

C-à-d

$$x_1\mathbf{a}_{1j} + x_2\mathbf{a}_{2j} + \ldots x_n\mathbf{a}_{nj} = x_1\mathbf{b}_{1j} + x_2\mathbf{b}_{2j} + \ldots x_n\mathbf{b}_{nj}, \quad \textit{pour tout } j = 1, \ldots, m.$$

On peut donc écrire

$$x_1(\mathbf{a}_{1j} - \mathbf{b}_{1j}) + x_2(\mathbf{a}_{2j} - \mathbf{b}_{2j}) + \dots x_n(\mathbf{a}_{nj} - \mathbf{b}_{nj}) = 0, \quad \textit{pour tout } j = 1, \dots, m.$$

Cette equation est vraie pour tout $\mathbf{x}$ *seulement si* $\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{b}_{ij}$ *pour tout* $i = 1, \dots, n$ *et* $j = 1, \dots, m$, *c-à-d seulement si* $A = B$.

Exercice 4

Soit A une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $n \times p$ telles que

$$\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Col} B = \{\mathbf{0}\}.$$

Soit $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_k\}$, $k \leq n$, une base de $\operatorname{Col} B$. Montrer que $\{A\mathbf{b}_1, \cdots, A\mathbf{b}_k\}$ est une base de $\operatorname{Col}(AB)$.

Solution : Méthode 1 : *Soit* $\mathbf{T}_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *l'application linéaire associée à la matrice* A. *On considère sa restriction* $\mathbf{T}_{A_{|\operatorname{Col} B}}$ *au sous-espace* $\operatorname{Col} B \subset \mathbb{R}^n$ *:*

$$\mathbf{T}_{A_{|\operatorname{Col} B}} : \operatorname{Col} B \to \mathbb{R}^m.$$

Comme $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Col} B = \{\mathbf{0}\}$, *cette application est injective. De plus, l'image de cette application est* $\mathbf{T}_A(\operatorname{Col} B) = \operatorname{Col}(AB)$. *L'application* $\mathbf{T}_A$ *réalise donc une bijection entre* $\operatorname{Col} B$ *et* $\operatorname{Col}(AB)$. *Par conséquent, la matrice* A *transforme toute base de* $\operatorname{Col} B$ *en une base de* $\operatorname{Col}(AB)$.

Méthode 2 : *Montrons d'abord que la famille* $\{A\mathbf{b}_1, \cdots, A\mathbf{b}_k\}$ *est linéairement indépendante. Soient* $c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\begin{aligned} &c_1 A\mathbf{b}_1 + c_2 A\mathbf{b}_2 + \cdots + c_k A\mathbf{b}_k = \mathbf{0} \\ &\textit{alors, } A(c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_k\mathbf{b}_k) = \mathbf{0} \\ &\textit{ainsi, } c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_k\mathbf{b}_k \in \operatorname{Ker} A. \end{aligned}$$

Or, le vecteur $c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_k\mathbf{b}_k$ *appartient à* $\operatorname{Col} B$ *comme combinaison linéaire des* $\mathbf{b}_j \in \operatorname{Col} B$. *Mais* $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Col} B = \{\mathbf{0}\}$, *ainsi* $c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_k\mathbf{b}_k = \mathbf{0}$. $\mathcal{B}$ *étant une base,* $\mathcal{B}$ *est linéairement indépendante, d'où* $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$. *Par ailleurs,* $\{A\mathbf{b}_1, \cdots, A\mathbf{b}_k\}$ *engendre* $\operatorname{Col}(AB)$. *En effet,* $\operatorname{Col}(AB)$ *est l'ensemble des vecteurs de la forme* $(AB)x = A(Bx)$, *où* $x \in \mathbb{R}^p$. *De même,* $\operatorname{Col}(B)$ *est l'ensemble des* Bx, $x \in \mathbb{R}^p$. *Comme* $\operatorname{Col}(B)$ *est engendré par* $\{\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_k\}$, *on en déduit que* $\operatorname{Col}(AB)$ *est engendré par* $\{A\mathbf{b}_1, \cdots, A\mathbf{b}_k\}$. *La famille* $\{A\mathbf{b}_1, \cdots, A\mathbf{b}_k\}$ *est donc une base de* $\operatorname{Col}(AB)$.

Exercice 5

Soit $\mathbb{P}_4$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou egale à 4 et $\mathbb{P}_3$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou egale à 3. Soit $T : \mathbb{P}_4 \to \mathbb{P}_3$ l'application linéaire qui associe à chaque polynôme sa dérivé, c'est à dire $T(p) = p'$ pour chaque $p \in \mathbb{P}_4$.

(a) Calculer le noyau de T et trouver sa dimension.

(b) Étant donné la base $\mathcal{B} = \{1+x, 2x, x+x^2, x+x^3, x+x^4\}$ de $\mathbb{P}_4$ et la base $\mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3\}$ de $\mathbb{P}_3$, calculer la matrice $[T]_{\mathcal{CB}}$ associé à T par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

(c) Calculer la dérivée de $q(x) = 1 + 3x + 4x^3 - x^4$ en utilisant la matrice $[T]_{\mathcal{CB}}$.

(d) Calculer une base et la dimension du noyau de la matrice $[T]_{\mathcal{CB}}$. Quel est le rapport avec le noyay de T ?

Rappel : la dérivée de $a_k x^k$ est $a_k k x^{k-1}$, $k = 1, 2, ...$
Solution :

(a) Le noyau de la transformation T est l'ensemble des polynômes de p dans $\mathbb{P}_4$ tels que $T(p) = 0$. Seulement les constants ont dervée nulle, donc. $\mathrm{Ker}(T) = \{p(x) = a_o\,, a_0 \in \mathbb{R}\}$*, dont une base est constitué du polynome constant $p(x) = 1$. On conclut aussi que* $\dim \mathrm{Ker}(T) = 1$. .

(b) On peut écrire

$$\begin{aligned}
[T]_{\mathcal{CB}} &= [[T(b_1)]_{\mathcal{C}}, [T(b_2)]_{\mathcal{C}}, [T(b_3)]_{\mathcal{C}}, [T(b_4)]_{\mathcal{C}}, [T(b_5)]_{\mathcal{C}}] \\
&= \Big[[1]_{\mathcal{C}}, [2]_{\mathcal{C}}, [1+2x]_{\mathcal{C}}, [1+3x^2]_{\mathcal{C}}, [1+4x^3]_{\mathcal{C}}\Big] \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(c) Pour $q(x) = 1 + 3x + 4x^3 - x^4$, il faut d'abord trouver ses coordonnées par rapport à $\mathcal{B}$: Les coefficients α_j doivent satisfaire $\alpha_1(1+x) + \alpha_2(2x) + \alpha_3(x+x^2) + \alpha_4(x+x^3) + \alpha_5(x+x^4) = q(x)$. Il faut que les coefficients de chaque monome soient égaux, ce qui revient à résoudre le système linéaire dont la matrice augmentéee est

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right). \textit{ La solution est } [q]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Contrôle : $1(1+x) - \frac{1}{2}x + 0(x+x^2) + 4(x+x^3) - (x+x^4) = 1 + (1-1+4-1)x + 4x^3 - x^4 = q$
Les coefficients de sa dérivée q' peuvent être calculée comme suit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{[T]_{\mathcal{CB}}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}}_{[p]_{\mathcal{B}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}}_{[T(p)]_{\mathcal{C}}},$$

cà-d, $q'(x) = 3 + 12x^2 - 4x^3$. Cela est cohérent avec le calcul direct de la dérivée de q.

(d) *En partant de la matrice* $[T]_{\mathcal{CB}}$*, qui est déjà sous forme forme échelonnée, on remarque qu'il y a 4 colonnes pivot, donc* $\mathrm{rg}([T]_{\mathcal{CB}}) = 4$*. En utilisant le théorème de rang :*

$$\dim \mathrm{Ker}\,[T]_{\mathcal{CB}} = (\text{nombre de colonnes de } [T]_{\mathcal{CB}}) - \mathrm{rg}([T]_{\mathcal{CB}}) = 5 - 4 = 1.$$

De plus, x_2 *est la seule variable libre du système et une base du* $\mathrm{Ker}\,[T]_{\mathcal{CB}}$ *est par exemple :*

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Une base du noyau de $[T]_{\mathcal{CB}}$ *est donnée par le polynome* p *tel que* $[p]_{\mathcal{C}} = (-2, 1, 0, 0, 0)^T$*, c'est à dire* $p(x) = -2(1 + x) + x = -2$*, ce qui est cohérent avec le résultat au point (a), même si la base n'est pas égale. La dimension du noyau de* $[T]_{\mathcal{CB}}$ *est 1, comme la dimension du noyau de* T*.*

Dans ce exercice, le contrôle est fait en regardant la correspondance entre les espaces des polynomes et les espaces coordonnées, par exemple entre T *et* $[T]_{\mathcal{CB}}$*.*

Exercices de révision

Exercice 6

Considérons le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 8x_3 & = & 7 \\ -3x_1 & - & 7x_2 & + & 9x_3 & = & -6. \end{array} \right.$$

i) Écrire le système sous forme matricielle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Solution :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & -8 \\ -3 & -7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

ii) Écrire le système comme une combinaison linéaire des colonnes de la matrice A.

Solution :

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

iii) Trouver la solution générale de l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Solution : *La matrice augmentée est*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 1 & 4 & -8 & 7 \\ -3 & -7 & 9 & -6 \end{pmatrix},$$

et la forme échelonnée réduite est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La variable x_3 est libre, on peut donc écrire :

$$s_3 = t,\ t \in \mathbb{R},\ s_1 = -5 - 4t,\ s_2 = 3 + 3t.$$

On en déduit l'ensemble des solutions :

$$\left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 7

Calculer $A(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2)$, où

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3;$$

Solution :

$$A(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1.$$

Solution :

$$A(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 18 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8

Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants ? Engendrent-ils $\mathbb{R}^3$ (questions a) et b)) ou $\mathbb{R}^2$ (question c)) ?

a) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solution : *On cherche une combinaison linéaire des vecteurs telle que*

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui conduit au système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ 2x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & & & = & 0 \end{array} \right. .$$

Ce système possède une unique solution triviale $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, donc les vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$ sont linéairement indépendants, et ils engendrent $\mathbb{R}^3$.

b) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Solution : *$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$ ne sont pas linéairement indépendants. En effet, $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2$. Ainsi ces trois vecteurs n'engendrent pas $\mathbb{R}^3$.*

c) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Solution : $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ *et* $\mathbf{v}_3$ *ne sont pas linéairement indépendants, car ils sont de taille* 2 *strictement inférieure au nombre* 3 *de vecteurs. Cependant, ces vecteurs sont linéairement indépendants deux à deux, donc ils engendrent* $\mathbb{R}^2$*.*

Remarque

On utilise :

Les colonnes de A *engendrent* $\mathbb{R}^m$*.*

$\Leftrightarrow$ *Pour tout vecteur* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$*, l'équation* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *a une solution* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *(tout vecteur* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ *peut s'exprimer comme combinaison linéaire des colonnes de* A*).*

$\Leftrightarrow$ *La matrice augmentée n'a pas de ligne de la forme* $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & c \end{bmatrix}$ *avec c non nul (car le système est compatible) ; la forme échelonnée de* A *n'a pas de ligne nulle* $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ *(car* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *a une solution pour tout* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$*).*

$\Leftrightarrow$ *Chaque ligne a une position pivot.*

Exercice 9

Décrire quelle est la forme échelonnée réduite dans les cas suivants :

a) A est une matrice 3×3 avec des colonnes linéairement indépendantes.

Solution : *Comme les colonnes de* A *sont linéairement indépendantes, le système homogène* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *n'admet que la solution triviale. Ainsi la forme échelonnée réduite s'écrit* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) A est une matrice 4×2, $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$ et $\mathbf{a}_2$ n'est pas un multiple de $\mathbf{a}_1$.

Solution : *Si* $\mathbf{a}_2$ *n'est pas un multiple de* $\mathbf{a}_1$*, alors il n'existe pas* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $\mathbf{a}_2 = \lambda \mathbf{a}_1$*. Deux cas sont possibles.*

Si $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$*, alors les deux vecteurs* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ *sont linéairement indépendants, et la forme échelonnée réduite est :* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Si $\mathbf{a}_1$ *est le vecteur nul, alors le vecteur* $\mathbf{a}_2$ *est non nul (car non multiple de* $\mathbf{0}$*), et la forme échelonnée réduite est :* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) A est une matrice 4×3, $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$. Les vecteurs $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$ sont linéairement indépendants, et $\mathbf{a}_3$ n'est pas une combinaison linéaire de $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$.

Solution : $\mathbf{a}_1$ *et* $\mathbf{a}_2$ *sont linéairement indépendants, donc ils engendrent un espace de dimension* 2*. Le vecteur* $\mathbf{a}_3$ *n'est pas dans cet espace, car ce n'est pas une combinaison linéaire de* $\mathbf{a}_1$*,* $\mathbf{a}_2$*. Par conséquent, les trois vecteurs* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ *engendrent un espace de dimension* 3*, ils sont linéairement indépendants.*

D'où la forme échelonnée réduite de A : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 10

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Les colonnes d'une matrice A sont linéairement indépendantes si l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admet la solution triviale.

b) Si A possède des colonnes linéairement dépendantes, alors l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admet une solution non triviale.

c) Les colonnes de toute matrice de taille 4×5 sont linéairement dépendantes.

d) Si le vecteur nul est l'un des vecteurs d'une famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p)$, alors ces vecteurs sont linéairement indépendants.

Solution : *Vrai : b) Ce système admet toujours* 0 *comme solution. S'il en existe une autre, alors l'application linéaire associée à la matrice A n'est pas bijective puisque* 0 *admet deux antécédents différents. Donc A n'est pas de rang maximal et ses colonnes sont linéairement dépendantes. c) Cinq vecteurs dans $\mathbb{R}^4$ sont toujours linéairement dépendants. Faux : a) Quelque soit A, la solution triviale est toujours une solution à un système du type $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. d) Prenons $v_j = 0$ pour tout $1 \leq j \leq p$, on vérifie aisément que cette famille n'est pas indépendante.*

Exercice 11

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils se trouvent sur une même droite qui passe par l'origine.

b) Si un ensemble comporte moins de vecteurs que le nombre de composantes de ceux-ci, alors il est linéairement indépendant.

c) Une équation homogène est toujours compatible.

d) Si $\mathbf{x}$ est une solution non triviale de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, alors aucune composante de $\mathbf{x}$ est nulle.

Solution : *Vrai : a), c). Faux : b), d).*

Exercice 12

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Si une forme échelonnée d'une matrice augmentée possède [0 0 0 0 5] comme ligne, alors le système est incompatible.

b) Il existe plusieurs formes échelonnées d'une matrice augmentée.

c) À chaque fois que l'on a une variable libre dans un système linéaire, le système possède une infinité de solutions.

d) Une solution générale d'un système est une description explicite de toutes les solutions du système.

Solution : *Vrai : a), b), d). Faux : c).*

Partiellement en classe

Exercice 13

Soit A une matrice $m \times n$ et $T_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'application linéaire définie par $x \mapsto Ax$. Quelles affirmations sont toujours vraies ?

A. L'image de T_A est l'espace colonne de A.

B. L'image de T_A est l'espace de tous les $b \in \mathbb{R}^m$ tels que $Ax = b$ est compatible.

C. Le noyeau de T_A est l'espace ligne de A.

D. Le noyeau de T_A est l'espace des solutions de l'équation $Ax = 0$.

Solution : *A. Vrai, B. Vrai, C. Faux, D. Vrai*

Exercice 14

Soit A une matrice de taille $m \times n$ et soit l'application linéaire $\mathbf{T}_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ donnée par $\mathbf{T}_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Remplacer le symbole ?=? par le bon opérateur logique $\Rightarrow$, $\Leftarrow$,$\Leftrightarrow$, ou $\neq$

(a) $\mathbf{T}_A$ est injective ?=? A a une position pivot dans chaque colonne.

(b) $\mathbf{T}_A$ est surjective ?=? A a une position pivot dans chaque ligne.

Le montrer et préciser dans chaque cas quelle est la condition nécessaire entre m et n.
Solution : *Il s'agit à chaque fois d'équivalences, ie., $\Leftrightarrow$ (a)*

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_A \textit{ injective} &\Leftrightarrow \mathbf{T}_A(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \textit{ n'admet que la solution triviale}\\
&\Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0} \textit{ n'admet que la solution triviale}\\
&\Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0} \textit{ n'a pas de variable libre}\\
&\Leftrightarrow A \textit{ a une position pivot dans chaque colonne.}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_A \textit{ surjective} &\Leftrightarrow \mathbf{T}_A(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \textit{ a une solution pour tout } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m\\
&\Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b} \textit{ a une solution pour tout } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m\\
&\Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b} \textit{ est compatible pour tout } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m\\
&\Leftrightarrow A \textit{ a une position pivot dans chaque ligne.}
\end{aligned}$$

Pour répondre à la deuxième question, nous observons que pour la matrice A on a

$$\textit{nombre de positions pivot } \leq \min\{m, n\},$$

comme le nombre maximal de positions pivot est atteint si chaque élément diagonal a_{ii} de la matrice A (de taille $m \times n$) est une position pivot. Alors,

(a) on a déduit que $\mathbf{T}_A$ est injective si et seulement si A a n positions pivot. Donc, il est nécessaire que $n \leq m$.

(b) on a déduit que $\mathbf{T}_A$ est surjective si et seulement si A a m positions pivot. Donc, il est nécessaire que $m \leq n$.

On retrouve au passage que nécessairement $n = m$ lorsque $\mathbf{T}_A$ est bijective (cf. Exercice 5).

Exercice 15

Vrai ou faux ?

A. Soit V un espace vectoriel de dimension 2022 et W un espace vectoriel de dimension 2021. Alors le noyau de toute transformation linéaire surjective $T\colon V \to W$ est toujours de dimension 1.

B. Soit $T\colon \mathbb{R}^7 \to \mathbb{P}_6(\mathbb{R})$ une application linéaire injective. Alors T est surjective.

C. Soit V un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ une base ordonnée de V. Alors l'application des coordonnées $[\cdot]_{\mathcal{B}}\colon V \to \mathbb{R}^n$ est une application linéaire bijective.

Solution : *A. Vrai, B. Vrai, C. Vrai*

Exercice 16

Soit $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + x_3 \\ 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Soient E la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et B une base de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Donner la matrice M qui représente $\mathbf{T}$ par rapport aux bases E (de départ) et B (d'arrivée).

(b) Même question pour les bases B (de départ) et E (d'arrivée).

(c) Même question pour les bases B (de départ) et B (d'arrivée).

Solution : *Deux versions : une sans utiliser la théorie sur le changement de base, et une avec.*

Sans utiliser la théorie sur le changement de base

(a) On note $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ les vecteurs de la base canonique E de $\mathbb{R}^3$. Par définition, la matrice canonique de l'application $\mathbf{T}$ est

$$\left([\mathbf{T}(\mathbf{e}_1)]_E \quad [\mathbf{T}(\mathbf{e}_2)]_E \quad [\mathbf{T}(\mathbf{e}_3)]_E \right).$$

On cherche

$$M = \left([\mathbf{T}(\mathbf{e}_1)]_B \quad [\mathbf{T}(\mathbf{e}_2)]_B \quad [\mathbf{T}(\mathbf{e}_3)]_B \right).$$

On va donc chercher les vecteurs cordonnées de $\mathbf{T}(\mathbf{e}_1)$, $\mathbf{T}(\mathbf{e}_2)$ *et* $\mathbf{T}(\mathbf{e}_3)$ *par rapport à la base* B*. On note* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ *les vecteurs de la base* B*. Commençons par* $\mathbf{T}(\mathbf{e}_1)$*. On cherche l'unique vecteur* $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ *tel que* $\mathbf{T}(\mathbf{e}_1) = r_1\mathbf{b}_1 + r_2\mathbf{b}_2 + r_3\mathbf{b}_3$*, i.e.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = [\mathbf{T}(\mathbf{e}_1)]_B \,. \tag{1}$$

De façon similaire, on obtient

$$[\mathbf{T}(\mathbf{e}_2)]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad [\mathbf{T}(\mathbf{e}_3)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) On procède de manière identique pour expliciter

$$M = \left([\mathbf{T}(\mathbf{b}_1)]_E \quad [\mathbf{T}(\mathbf{b}_2)]_E \quad [\mathbf{T}(\mathbf{b}_3)]_E\right) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ici les 3 systèmes à résoudre sont très simples car ils font intervenir la matrice identité (matrice dont les colonnes sont les vecteurs de la base canonique E*).*

(c) La matrice M *recherchée est ici donnée par*

$$M = \left([\mathbf{T}(\mathbf{b}_1)]_B \quad [\mathbf{T}(\mathbf{b}_2)]_B \quad [\mathbf{T}(\mathbf{b}_3)]_B\right).$$

Les 3 systèmes à résoudre font intervenir la même matrice qu'en (1)*. On obtient*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la théorie sur le changement de base

(a) On commence par prendre les vecteurs de la base de départ et à leur appliquer la transformation $\mathbf{T}$*. On obtient*

$$\mathbf{T}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

qui sont encore exprimés dans la base canonique E. Il faut maintenant calculer la matrice de passage de la base E à la base B, notée P_{BE} (telle que $[\mathbf{x}]_B = P_{BE}[\mathbf{x}]_E$). On sait, du cours, que cette matrice est l'inverse de la matrice de passage de la base B à la base E, notée P_{EB}. Cette dernière est donnée par

$$P_{EB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

i.e. ses colonnes sont les vecteurs de la base B, exprimés dans la base E. Pour calculer son inverse, on peut utiliser la méthode vue en cours (avec l'identité à droite), ou calculer directement son inverse en résolvant $P_{EB}P_{EB}^{-1} = I_3$, où l'on pose

$$P_{EB}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

On résout

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice P_{EB} contient beaucoup de zéros, il sera plus simple de résoudre le système d'équations obtenu que d'utiliser la méthode vue en cours. On obtient facilement que l'inverse est

$$P_{EB}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P_{BE}.$$

On applique alors P_{BE} aux vecteurs obtenus précédemment (qui sont exprimés dans la base E). La matrice M est

$$M = ([P_{BE}\mathbf{T}(\mathbf{e}_1)] \quad [P_{BE}\mathbf{T}(\mathbf{e}_2)] \quad [P_{BE}\mathbf{T}(\mathbf{e}_3)]) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\mathbf{T}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

qui sont exprimés dans la base canonique E. La matrice M est

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) On applique P_{BE} aux vecteurs obtenus au point précédent et on obtient la matrice

$$M = ([P_{BE}\mathbf{T}(\mathbf{b}_1)] \quad [P_{BE}\mathbf{T}(\mathbf{b}_2)] \quad [P_{BE}\mathbf{T}(\mathbf{b}_3)]) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17

Soient $T : V \to W$ une application linéaire de $V = \mathbb{P}_2$ dans $W = \mathbb{P}_1$ et $B = (b_1, b_2, b_3) = (t^2 - t + 1, 2t + 1, 2t - 1)$ et $C = (1, t)$ bases de V et W.

Soit T telle que

$$T(b_1) = 2t - 1, \quad T(b_2) = 2, \quad T(b_3) = 2$$

Soit $p(t) = t^2$, calculer $T(p)$ ainsi que $[T(p)]_C$.

Quelle est la marche à suivre ?
Mettre dans l'ordre et éliminer les **2 intrus** :

a. Mettre sous forme échelonnée la matrice augmentée $(B|p)$.

b. Alors $T(p) = \alpha_1 T(b_1) + \alpha_2 T(b_2) + \alpha_3 T(b_2)$.

c. Calculer $[p]_B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ($\leftarrow$ en colonne).

d. Compléter la base C en une base de V.

e. Trouver les coordonnées de $T(p)$ par rapport à C.

Solution :

i. calculer $[p]_B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ($\leftarrow$ en colonne)

ii. alors $T(p) = \alpha_1 T(b_1) + \alpha_2 T(b_2) + \alpha_3 T(b_2)$

iii. trouver les coordonné de $T(p)$ par rapport à C

Rappel : ici,

$$[a_0 + a_1 t + a_2 t^2]_B = \begin{pmatrix} a_2 \\ \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{4}a_1 - \frac{1}{4}a_2 \\ -\frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{4}a_1 + \frac{3}{4}a_2 \end{pmatrix}$$

(To be continued)

Exercice 18

Soient $\mathcal{C} = (1, t, t^2)$ la base canonique de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ et $T \colon \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par

$$T(a + bt + ct^2) = a + b(t - 1) + c(t - 1)^2.$$

Alors, on a $[T(p)]_{\mathcal{C}} = M[p]_{\mathcal{C}}$ pour tout $p \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, où

A. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

C. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B. $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D. $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solution : *Sans corrigé*

Exercice 19

Soit $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4x_3 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 \end{bmatrix}.$$

Considérer la base ordonnée $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ de $\mathbb{R}^3$.

Alors la matrice M telle que $[T(v)]_{\mathcal{B}} = M[v]_{\mathcal{B}}$ est

A. $M = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ C. $M = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ -2 & -8 & -3 \end{pmatrix}$

B. $M = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & -8 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ D. $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 8 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Solution :

$[\mathcal{T}(v)]_{\mathcal{B}}$ signifie la transformation $\mathcal{T}$ appliquée à v écrite selon la base $\mathcal{B}$. Pour trouver la matrice associée à $\mathcal{T}$, on commence par remplacer l'un des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{T}$

$$\mathcal{T}(v_1) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}\right)$$

Or ce vecteur doit aussi s'écrire selon la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{T}(v_1) = \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}\right) = 6 * \mathbf{b}_1 - 2 * \mathbf{b}_3$$

Ainsi, la première colonne de $\mathcal{M}$ sera

$$\left(\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$$

Le même raisonnement s'applique pour la deuxième colonne

$$\mathcal{T}(v_2) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$$

Or ce vecteur doit aussi s'écrire selon la base $\mathcal{B}$, soit

$$\mathcal{T}(v_1) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = 2 * \mathbf{b}_1 + 6 * \mathbf{b}_2 - 8 * \mathbf{b}_2$$

Ainsi, la deuxième colonne de $\mathcal{M}$ sera

$$\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix}\right)$$

La réponse est C.

Exercice 20

Soient $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ linéaire et les bases ordonnées $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ définies par

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ x_3 + x_1 + x_4 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right), \mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

Alors la matrice M telle que $[T(v)]_{\mathcal{C}} = M[v]_{\mathcal{B}}$ est

A. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & -2 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

B. $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7/3 & 2 \\ 2 & -3 & -8/3 & -1 \end{pmatrix}$

C. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & -2 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

D. $M = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Solution :

$[\mathcal{T}(v)]_{\mathcal{C}}$ *signifie la transformation* $\mathcal{T}$ *appliquée à* v *écrite selon la base* $\mathcal{C}$*. En utilisant la même technique que l'exercice précédent, on commence par remplacer un des vecteurs de* $\mathcal{B}$ *dans* $\mathcal{T}$

$$\mathcal{T}(v_1) = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$$

Or ce vecteur doit aussi s'écrire selon la base $\mathcal{C}$*, soit*

$$\mathcal{T}(v_1) = \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = 0 * \mathbf{b}_1 + 2 * \mathbf{b}_2$$

Ainsi, la première colonne de $\mathcal{M}$ *sera*

$$\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$$

La réponse est donc B.

Informations générales, séries et corrigés : cf.
`http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414`
Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications.* De Boeck, Bruxelles, 2005.