

Série 6

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

1. calculer le noyau et image d'une application linéaire.
2. transformations injective et surjective
3. matrice associée à une transformation linéaire
4. théorème du rang

Nouveau vocabulaire dans cette série

- transformation linéaire
- matrice de T par rapport à ...
- noyau et image d'une transformation linéaire

Exercice 1

On appelle *trace* d'une matrice carrée A , et l'on note $\text{tr}(A)$, la somme des éléments diagonaux de A . Soit $\mathcal{M}_{n \times n}$ l'espace vectoriel des matrices de tailles $n \times n$.

- (i) Montrer que l'application $\text{tr}: \mathcal{M}_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \text{tr}(A)$ est une application linéaire.
- (ii) Calculer la dimension de $\text{Ker}(\text{tr})$.
- (ii) Montrer que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ pour toutes les matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$.

Exercice 2

Soient V et W deux espaces vectoriels, et $T: V \rightarrow W$ une transformation linéaire. Montrer que si $U \subset V$ est un sous-espace vectoriel, alors l'ensemble image $T(U)$ est un sous-espace vectoriel de W .

Exercice 3

Soient A et B deux matrices de taille $m \times n$ telles que $A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$ pour tout vecteur \mathbf{x} dans \mathbb{R}^n . Démontrer que $A = B$.

Exercice 4

Soit A une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $n \times p$ telles que

$$\text{Ker } A \cap \text{Col } B = \{\mathbf{0}\}.$$

Soit $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k\}$, $k \leq n$, une base de $\text{Col } B$. Montrer que $\{A\mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{b}_k\}$ est une base de $\text{Col}(AB)$.

Exercice 5

Soit \mathbb{P}_4 l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égale à 4 et \mathbb{P}_3 l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égale à 3. Soit $T : \mathbb{P}_4 \rightarrow \mathbb{P}_3$ l'application linéaire qui associe à chaque polynôme sa dérivée, c'est à dire $T(p) = p'$ pour chaque $p \in \mathbb{P}_4$.

- (a) Calculer le noyau de T et trouver sa dimension.
- (b) Étant donné la base $\mathcal{B} = \{1+x, 2x, x+x^2, x+x^3, x+x^4\}$ de \mathbb{P}_4 et la base $\mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3\}$ de \mathbb{P}_3 , calculer la matrice $[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ associée à T par rapport aux bases \mathcal{B} et \mathcal{C} .
- (c) Calculer la dérivée de $q(x) = 1 + 3x + 4x^3 - x^4$ en utilisant la matrice $[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$.
- (d) Calculer une base et la dimension du noyau de la matrice $[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$. Quel est le rapport avec le noyau de T ?

Rappel : la dérivée de $a_k x^k$ est $a_k k x^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$

Exercices de révision

Exercice 6

Considérons le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -6. \end{cases}$$

- i) Écrire le système sous forme matricielle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- ii) Écrire le système comme une combinaison linéaire des colonnes de la matrice A .
- iii) Trouver la solution générale de l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Exercice 7

Calculer $A(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2)$, où

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3;$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1.$$

Exercice 8

Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants? Engendrent-ils \mathbb{R}^3 (questions a) et b)) ou \mathbb{R}^2 (question c))?

a) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

b) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

c) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$

Exercice 9

Décrire quelle est la forme échelonnée réduite dans les cas suivants :

- A est une matrice 3×3 avec des colonnes linéairement indépendantes.
- A est une matrice 4×2 , $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$ et \mathbf{a}_2 n'est pas un multiple de \mathbf{a}_1 .
- A est une matrice 4×3 , $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$. Les vecteurs \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 sont linéairement indépendants, et \mathbf{a}_3 n'est pas une combinaison linéaire de \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 .

Exercice 10

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- Les colonnes d'une matrice A sont linéairement indépendantes si l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admet la solution triviale.
- Si A possède des colonnes linéairement dépendantes, alors l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admet une solution non triviale.
- Les colonnes de toute matrice de taille 4×5 sont linéairement dépendantes.
- Si le vecteur nul est l'un des vecteurs d'une famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p)$, alors ces vecteurs sont linéairement indépendants.

Exercice 11

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- Deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils se trouvent sur une même droite qui passe par l'origine.
- Si un ensemble comporte moins de vecteurs que le nombre de composantes de ceux-ci, alors il est linéairement indépendant.
- Une équation homogène est toujours compatible.
- Si \mathbf{x} est une solution non triviale de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, alors aucune composante de \mathbf{x} est nulle.

Exercice 12

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- Si une forme échelonnée d'une matrice augmentée possède $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 5]$ comme ligne, alors le système est incompatible.
- Il existe plusieurs formes échelonnées d'une matrice augmentée.
- À chaque fois que l'on a une variable libre dans un système linéaire, le système possède une infinité de solutions.
- Une solution générale d'un système est une description explicite de toutes les solutions du système.

Partiellement en classe

Exercice 13

Soit A une matrice $m \times n$ et $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ l'application linéaire définie par $x \mapsto Ax$. Quelles affirmations sont toujours vraies ?

- A. L'image de T_A est l'espace colonne de A .
- B. L'image de T_A est l'espace de tous les $b \in \mathbb{R}^m$ tels que $Ax = b$ est compatible.
- C. Le noyau de T_A est l'espace ligne de A .
- D. Le noyau de T_A est l'espace des solutions de l'équation $Ax = 0$.

Exercice 14

Soit A une matrice de taille $m \times n$ et soit l'application linéaire $\mathbf{T}_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ donnée par $\mathbf{T}_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Remplacer le symbole $??$ par le bon opérateur logique $\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$, ou \neq

- (a) \mathbf{T}_A est injective $??$ A a une position pivot dans chaque colonne.
- (b) \mathbf{T}_A est surjective $??$ A a une position pivot dans chaque ligne.

Le montrer et préciser dans chaque cas quelle est la condition nécessaire entre m et n .

Exercice 15

Vrai ou faux ?

- A. Soit V un espace vectoriel de dimension 2022 et W un espace vectoriel de dimension 2021. Alors le noyau de toute transformation linéaire surjective $T: V \rightarrow W$ est toujours de dimension 1.
- B. Soit $T: \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{P}_6(\mathbb{R})$ une application linéaire injective. Alors T est surjective.
- C. Soit V un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ une base ordonnée de V . Alors l'application des coordonnées $[\cdot]_{\mathcal{B}}: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application linéaire bijective.

Exercice 16

Soit $\mathbf{T}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + x_3 \\ 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Soient E la base canonique de \mathbb{R}^3 et B une base de \mathbb{R}^3 donnée par

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (a) Donner la matrice M qui représente \mathbf{T} par rapport aux bases E (de départ) et B (d'arrivée).
- (b) Même question pour les bases B (de départ) et E (d'arrivée).
- (c) Même question pour les bases B (de départ) et B (d'arrivée).

Exercice 17

Soient $T : V \rightarrow W$ une application linéaire de $V = \mathbb{P}_2$ dans $W = \mathbb{P}_1$ et $B = (b_1, b_2, b_3) = (t^2 - t + 1, 2t + 1, 2t - 1)$ et $C = (1, t)$ bases de V et W .

Soit T telle que

$$T(b_1) = 2t - 1, \quad T(b_2) = 2, \quad T(b_3) = 2$$

Soit $p(t) = t^2$, calculer $T(p)$ ainsi que $[T(p)]_C$.

Quelle est la marche à suivre ?

Mettre dans l'ordre et éliminer les **2 intrus** :

- Mettre sous forme échelonnée la matrice augmentée $(B|p)$.
- Alors $T(p) = \alpha_1 T(b_1) + \alpha_2 T(b_2) + \alpha_3 T(b_3)$.
- Calculer $[p]_B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ (\leftarrow en colonne).
- Compléter la base C en une base de V .
- Trouver les coordonnées de $T(p)$ par rapport à C .

Exercice 18

Soient $\mathcal{C} = (1, t, t^2)$ la base canonique de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ et $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par

$$T(a + bt + ct^2) = a + b(t - 1) + c(t - 1)^2.$$

Alors, on a $[T(p)]_C = M[p]_C$ pour tout $p \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, où

$$\text{A. } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{C. } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{B. } M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{D. } M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 19

Soit $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$T \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4x_3 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 \end{bmatrix}.$$

Considérer la base ordonnée $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ de \mathbb{R}^3 .

Alors la matrice M telle que $[T(v)]_{\mathcal{B}} = M[v]_{\mathcal{B}}$ est

A. $M = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

C. $M = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ -2 & -8 & -3 \end{pmatrix}$

B. $M = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & -8 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

D. $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 8 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 20

Soient $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ linéaire et les bases ordonnées \mathcal{B} de \mathbb{R}^4 et \mathcal{C} de \mathbb{R}^2 définies par

$$T \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ x_3 + x_1 + x_4 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right), \mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Alors la matrice M telle que $[T(v)]_{\mathcal{C}} = M[v]_{\mathcal{B}}$ est

A. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & -2 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

C. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & -2 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

B. $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7/3 & 2 \\ 2 & -3 & -8/3 & -1 \end{pmatrix}$

D. $M = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Copyright 2012 © Prof. Assyr Abdulle, Prof. Simone Deparis, Dr. Christian Urech.
Informations générales, séries et corrigés : cf.

<http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414>

Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.