Série 5 (Corrigé)

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

1. **vérifier ou construire des familles libres et/ou génératrices** d'un espace vectoriel ;
2. **extraire une base** d'une famille génératrice et **compléter en un base** un famille libre d'un espace vectoriel ;
3. **calculer le noyau et image d'une application linéaire**.

Nouveau vocabulaire dans cette série

- base
- dimension
- noyau d'une matrice
- image d'une matrice

Définitions :

Le **noyau** d'une matrice A de taille $m \times n$, noté $\ker A$, est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ constitué des solution du système homogène $Ax = 0$.

Le **rang** d'une matrice est la dimensions de l'espace engendré par ses colonne : $\mathrm{rg}(A) = \dim \mathrm{Col}(A)$

Exercice 1

Considérons les vecteurs $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix}$, et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$.

i) Est-il possible d'écrire $\mathbf{b}$ comme combinaison linéaire de $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$?

Solution : *Non. Considérons l'équation linéaire $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$, d'inconnues x_1, x_2. Le système linéaire correspondant est*

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 &= -3 \\ -2x_1 - 13x_2 &= 8 \\ 3x_1 - 3x_2 &= 1 \end{cases}$$

avec pour matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -2 & -13 & 8 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

et pour forme échelonnée réduite

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut voir que ce système ne possède pas de solution.

ii) Donner une interprétation géométrique du résultat.

Solution : *Cela signifie que le vecteur* $\mathbf{b}$ *n'appartient pas au plan formé des vecteurs* $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2$*, avec* x_1 *et* x_2 *réels.*

Exercice 2

Considérons les vecteurs $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Pour quelle(s) valeur(s) de α le vecteur $\mathbf{b}$ est-il une combinaison linéaire de $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$?

Solution : *Considérons le système linéaire* $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$*. En coordonnées, on obtient le système*

$$\begin{cases} x_1 & -3x_2 & = & \alpha \\ & x_2 & = & -5 \\ -2x_1 & +8x_2 & = & -3 \end{cases}$$

avec la matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & \alpha \\ 0 & 1 & -5 \\ -2 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Après des opérations élémentaires sur les lignes, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -15+\alpha \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 7+2\alpha \end{pmatrix}.$$

On voit que le système est compatible si et seulement si $7 + 2\alpha = 0$*, i.e.* $\alpha = -\frac{7}{2}$*. Dans ce cas, la matrice ci-dessus est la forme échelonnée réduite.*
(Remarque : Lorsque $7+2\alpha \neq 0$*, le système est incompatible, et la forme échelonnée réduite est*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad)$$

En résumé, le vecteur $\mathbf{b}$ *est une combinaison linéaire de* $\mathbf{a}_1$ *et* $\mathbf{a}_2$ *si et seulement si* $\alpha = -\frac{7}{2}$*.*

Exercice 3

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Les colonnes d'une matrice A sont linéairement indépendantes si l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admet la solution triviale.

b) Si A possède des colonnes linéairement dépendantes, alors l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admet une solution non triviale.

c) Les colonnes de toute matrice de taille 4×5 sont linéairement dépendantes.

d) Si le vecteur nul est l'un des vecteurs d'une famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p)$, alors ces vecteurs sont linéairement indépendants.

Solution : *Vrai : b) Ce système admet toujours* 0 *comme solution. S'il en existe une autre, alors l'application linéaire associée à la matrice A n'est pas bijective puisque* 0 *admet deux antécédents différents. Donc A n'est pas de rang maximal et ses colonnes sont linéairement dépendantes. c) Cinq vecteurs dans $\mathbb{R}^4$ sont toujours linéairement dépendants. Faux : a) Quelque soit A, la solution triviale est toujours une solution à un système du type $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. d) Prenons $v_j = 0$ pour tout $1 \leq j \leq p$, on vérifie aisément que cette famille n'est pas indépendante.*

Exercice 4

Donner un exemple d'une famille des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui

a) est linéairement indépendante, mais qui n'est pas une base.

b) engendre $\mathbb{R}^3$, mais qui n'est pas une base.

Solution : *Soient $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, c-à-d*

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) On peut prendre les deux premieres vecteur de la base canonique $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Ils sont linéairement indépendents, mais ils n'engendrent pas $\mathbb{R}^3$ et ils ne forment donc pas une base de $\mathbb{R}^3$.

b) On peut prendre les vecteurs suivants $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\}$. Ils engendrent $\mathbb{R}^3$, mais ils ne sont pas linéairement indépendents et ils ne forment donc pas une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5

(a) Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel W de $\mathbb{R}^2$ donné par $W = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ où $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solution : *Deux. En effet, les vecteurs $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sont linéairement indépendants, donc la dimension est au moins deux. Elle est inférieure ou égale à* 2 *car c'est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$.*

(b) Trouver un sous-ensemble B de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ tel que B soit une base de W.

Solution : *$B = \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ — c'est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. (Note : $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$ et $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ sont aussi possibles).*

(c) Agrandir l'ensemble $\{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\} \subset W$ pour obtenir une base de W.

Solution : *L'espace W est de dimension deux, donc n'importe quel vecteur non colinéaire à $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ convient. Par exemple, on peut proposer la base $\{\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1\}$ de W.*

Exercice 6

Soit $V = \mathbb{R}^4$ et $S = \{(2,0,3,4),(0,1,1,-1),(3,1,0,2),(1,0,-4,-1)\} \subset V$. Trouver une base de $\mathrm{Vect}(S)$ et compléter cette base en une base de V.

Solution : *Notons $v_1 = (2,0,3,4), v_2 = (0,1,1,-1), v_3 = (3,1,0,2), v_4 = (1,0,-4,-1)$. On peut vérifier que $v_1+v_2-v_3+v_4 = 0$ et que v_2, v_3, v_4 sont linéairement indépendants. Donc $\{v_2, v_3, v_4\}$ est une base de $\mathrm{Vect}(S)$. Enfin, on peut montrer que $w = (1,0,0,0) \notin \mathrm{Vect}(S)$, donc $\{v_2, v_3, v_4, w\}$ est libre et de cardinal 4. C'est donc une base de V.*

Pas fait en classe la semaine dernière

Si vous ne l'avez pas fais, résolvez ces exercices.

Exercice 7

Une base de $\mathbb{P}_d(\mathbb{R})$ est donnée par

A. $\{t, t^2, \ldots, t^d\}$

B. $\{1, t, t^2, \ldots, t^d\}$

C. $\{1, 1+t, 1+t+t^2, \ldots, 1+t+\cdots+t^d\}$

(plusieurs réponses correctes).
Solution : *B et C.*

Exercice 8

Soit

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Alors

A. $\dim \mathrm{Vect}(E) = 3$

B. $\dim \mathrm{Vect}(E) = 2$

C. $\dim \mathrm{Vect}(E) = 1$

D. $\dim \mathrm{Vect}(E) = 0$

Solution : *B.*

Partiellement en classe

Exercice 9

L'assertion suivante est-elle correcte (justifier) ?

Tout ensemble de vecteurs $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p\}$ de $\mathbb{R}^n$ est linéairement dépendant si $p > n$.
Solution :
L'assertion est correcte.

Théorème : si un ensemble $S = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p\}$ contient plus de vecteurs que chaque vecteur n'a de composantes, alors S est linéairement dépendant.

Justification : lorsque $p = n$, les vecteurs sont soit déjà linéairement dépendants, soit linéairement indépendants et ils engendrent alors $\mathbb{R}^n$. Ce dernier cas signifie que tout vecteur (en particulier un nouveau vecteur que l'on ajoute à l'ensemble S) peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres.

Exercice 10

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(A)$ et de $\mathrm{Col}(A)$.

Solution : *On note $A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$, avec $(\mathbf{v}_i)_{1 \leq i \leq 4}$ colonnes de A. Les vecteurs $\mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$ sont proportionnels à $\mathbf{v}_1$, donc ils sont superflus pour trouver une base de $\mathrm{Col}(A)$. Les vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4$ sont linéairement indépendants, ils constituent une base de $\mathrm{Col}(A)$.*

L'espace $\mathrm{Ker}(A)$ est constitué des vecteurs $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ tels que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. On a

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 + x_4\mathbf{v}_4 = (x_1 + 2x_2 + 3x_3)\mathbf{v}_1 + x_4\mathbf{v}_4,$$

ainsi $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ssi $x_4 = 0$ et $x_1 = -2x_2 - 3x_3$. Par conséquent, x_2 et x_3 sont des variables libres du système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. On obtient une base de $\mathrm{Ker}(A)$ en choisissant successivement $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, puis $x_2 = 0$, $x_3 = 1$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Deuxième version : *On met la matrice A sous forme échéllonée :*

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x_2 et x_3 sont des variables libres, l'ensemble des solution du problème homogène $Ax = \mathbf{0}$ est le noyau de A :

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, r, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Une base de $\mathrm{Ker}(A)$ est donc

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Une base de $\mathrm{Col}(A)$ est constitué par les colonnes pivots de A, i.e. les colonnes 1 et 4 :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 11

(a) On considère le vecteur $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ exprimé dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Trouver les coordonnées de $\mathbf{v}$ dans la base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, où $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solution : *Les coordonnées cherchées sont* (c_1, c_2) *avec* $\mathbf{v} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2$ *:*
$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, *on trouve* $c_1 = 2$, $c_2 = -1$.

(b) Même question pour $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ donné dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à exprimer dans la base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ donnée par $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solution : *On résout* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \mathbf{v}$ *et on obtient* $c_1 = -1$, $c_2 = 3$, $c_3 = 2$.

Exercice 12

Quelles sont les coordonnées de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ par rapport à la base ordonnée

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)?$$

A. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 13

Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ suivant ?

$$W := \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Trouver aussi une base de W et la compléter.

Exercice 14

On considère l'application $T\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a+b, c+d-a+1).$$

Alors,

A. T est linéaire,

B. T n'est pas linéaire.

Informations générales, séries et corrigés : cf.
`http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414`
Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications.* De Boeck, Bruxelles, 2005.