Série 5

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

1. **vérifier ou construire des familles libres et/ou génératrices** d'un espace vectoriel ;
2. **extraire une base** d'une famille génératrice et **compléter en un base** un famille libre d'un espace vectoriel ;
3. **calculer le noyau et image d'une application linéaire**.

Nouveau vocabulaire dans cette série

- base
- dimension
- noyau d'une matrice
- image d'une matrice

Définitions :

Le **noyau** d'une matrice A de taille $m \times n$, noté $\ker A$, est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ constitué des solution du système homogène $Ax = 0$.

Le **rang** d'une matrice est la dimensions de l'espace engendré par ses colonne : $\operatorname{rg}(A) = \dim \operatorname{Col}(A)$

Exercice 1

Considérons les vecteurs $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix}$, et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$.

i) Est-il possible d'écrire $\mathbf{b}$ comme combinaison linéaire de $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$?

ii) Donner une interprétation géométrique du résultat.

Exercice 2

Considérons les vecteurs $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Pour quelle(s) valeur(s) de α le vecteur $\mathbf{b}$ est-il une combinaison linéaire de $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$?

Exercice 3

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Les colonnes d'une matrice A sont linéairement indépendantes si l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admet la solution triviale.

b) Si A possède des colonnes linéairement dépendantes, alors l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admet une solution non triviale.

c) Les colonnes de toute matrice de taille 4×5 sont linéairement dépendantes.

d) Si le vecteur nul est l'un des vecteurs d'une famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p)$, alors ces vecteurs sont linéairement indépendants.

Exercice 4

Donner un exemple d'une famille des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui

a) est linéairement indépendante, mais qui n'est pas une base.

b) engendre $\mathbb{R}^3$, mais qui n'est pas une base.

Exercice 5

(a) Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel W de $\mathbb{R}^2$ donné par $W = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ où $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Trouver un sous-ensemble B de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ tel que B soit une base de W.

(c) Agrandir l'ensemble $\{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\} \subset W$ pour obtenir une base de W.

Exercice 6

Soit $V = \mathbb{R}^4$ et $S = \{(2, 0, 3, 4), (0, 1, 1, -1), (3, 1, 0, 2), (1, 0, -4, -1)\} \subset V$. Trouver une base de $\mathrm{Vect}(S)$ et compléter cette base en une base de V.

Pas fait en classe la semaine dernière

Si vous ne l'avez pas fais, résolvez ces exercices.

Exercice 7

Une base de $\mathbb{P}_d(\mathbb{R})$ est donnée par

A. $\{t, t^2, \ldots, t^d\}$

B. $\{1, t, t^2, \ldots, t^d\}$

C. $\{1, 1+t, 1+t+t^2, \ldots, 1+t+\cdots+t^d\}$

(plusieurs réponses correctes).

Exercice 8

Soit

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Alors

A. $\dim \mathrm{Vect}(E) = 3$

B. $\dim \mathrm{Vect}(E) = 2$

C. $\dim \mathrm{Vect}(E) = 1$

D. $\dim \mathrm{Vect}(E) = 0$

Partiellement en classe

Exercice 9

L'assertion suivante est-elle correcte (justifier) ?

Tout ensemble de vecteurs $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p\}$ de $\mathbb{R}^n$ est linéairement dépendant si $p > n$.

Exercice 10

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(A)$ et de $\mathrm{Col}(A)$.

Exercice 11

(a) On considère le vecteur $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ exprimé dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Trouver les coordonnées de $\mathbf{v}$ dans la base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, où $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Même question pour $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ donné dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à exprimer dans la base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ donnée par $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 12

Quelles sont les coordonnées de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ par rapport à la base ordonnée

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) ?$$

A. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 13

Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ suivant ?

$$W := \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Trouver aussi une base de W et la compléter.

Exercice 14

On considère l'application $T\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a+b, c+d-a+1).$$

Alors,

A. T est linéaire,

B. T n'est pas linéaire.

Informations générales, séries et corrigés : cf.
`http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414`
Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications.* De Boeck, Bruxelles, 2005.