Série 4 (Corrigé)

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

1. déterminer si une famille de vecteurs est **libre** (aussi appelée **linéaire indépendante**) ou **liée** (aussi appelée **linéaire dépendante**) ;
2. déterminer le **sous-espace vectoriel engendré** par une famille de vecteurs ;
3. connaître la définition d'**application linéaire**, ainsi que quelques propriétés basiques.

Nouveau vocabulaire dans cette série

- sous-espace vectoriel engendré
- famille génératrice
- famille libre (ou linéairement indépendante)
- SEL homogène
- famille liée (ou linéairement dépendante)
- application linéaire

Exercice 1

Soit W un espace vectoriel et $W_1, W_2 \subseteq W$ deux sous-espaces vectoriels. Montrer que $W_1 \cap W_2$ est aussi un sous-espace vectoriel.

Solution : *On sait que $0 \in W_1 \cap W_2$, donc l'intersection est non vide. Soient $v, w \in W_1 \cap W_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on sait par hypothèse que $v + \lambda w \in W_1$ et $v + \lambda w \in W_2$. Donc $v + \lambda w \in W_1 \cap W_2$, ce qu'on voulait montrer.*

Exercice 2

Soit $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \times n$.

(a) Montrer que le sous-ensemble $\mathcal{S}_{n\times n}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques est un sous-espace vectoriel.

(b) Montrer que le sous-ensemble de $\mathcal{A}_{n\times n}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ constitué des matrices antisymétriques est un sous-espace vectoriel.

(c) Montrer que $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{n\times n}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Solution :

(a) $0 \in \mathcal{S}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *. Il suffit donc de montrer que la condition* $\forall i, j,\ m_{i,j} = m_{j,i}$ *est toujours vérifiée quand on additionne deux matrices symétriques ou qu'on multiplie une matrice symétrique par un scalaire.*

(b) La preuve est similaire à celle de (a).

(c) Toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *se décompose en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique :* $M = \frac{1}{2}(M + M^T) + \frac{1}{2}(M - M^T)$*. On en déduit que* $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{n\times n}(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_{n\times n}(\mathbb{R})$*. De plus, la seule matrice à la fois symétrique et antisymétrique est la matrice nulle. En effet* $\forall i, j,\ m_{i,j} = m_{j,i} = -m_{i,j} = 0$*. Les deux sous-espaces sont donc en somme directe.*

Exercice 3

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

1. Soient V un espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de V. Alors on a aussi que V est un sous-espace vectoriel de lui-même (ou d'un espace vectoriel plus grand) et H est un espace vectoriel.

2. Si H est un sous-ensemble d'un espace vectoriel V, alors il suffit que 0_V soit dans H pour que H soit un sous-espace vectoriel de V.

Solution : *Vrai : a) Un sous-espace vectoriel est en particulier un espace vectoriel. Faux : b) Il faut aussi que H soit stable par l'addition des vecteurs et par la multiplication par un scalaire.*

Exercices optionnels

Exercice 4

On rappelle que $C([0, 1])$ est l'espace vectoriel des fonctions continues sur le segment $[0, 1]$.

(a) L'ensemble de vecteurs $\{t \mapsto \sin t,\ t \mapsto \cos t\}$ est-il linéairement indépendant dans $C([0, 1])$?

Solution : Solution abrégée : *Oui car si* c_1, c_2 *sont des scalaires tels que* $c_1 \sin t + c_2 \cos t = 0$ *pour tout* $t \in [0, 1]$*, alors en prenant* $t = 0$ *puis* $t = \pi/6$*, on obtient* $c_2 = 0$ *(car* $\sin 0 = 0$ *et* $\cos 0 = 1$*) puis* $c_1 = 0$ *(car* $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$*).*

Solution détaillée : *On rappelle que l'élément zéro de l'espace* $\mathcal{C}([0, 1])$ *est la fonction* $z(t)$ *qui vaut* $z(t) = 0$ *pour tout* $t \in [0, 1]$*. Donc, si pour deux fonctions continues* f_1 *et* f_2 *(c.a.d., éléments de* $\mathcal{C}([0, 1])$*) il existe un paire de scalaires* c_1*,* c_2 *différents de zéro tels que* $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) = 0$ *pour tout* $t \in [0, 1]$*, alors* f_1 *et* f_2 *sont linéairement dépendantes. Par exemple, considerons la fonction* $f_1(t) = \log((t + 1)^2)$ *et la fonction* $f_2(t) = \log(t+1)$*. Pour les propriétés du logarithme, nous avons* $f_1(t) - 2f_2(t) = 0$ *pour toutes les valeurs de* t *dans* $[0, 1]$*. Considérons maintenant* $f_1(t) = t$ *et* $f_2(t) = 3t - 1$*. La fonction* $f_s(t) = -f_1(t) + f_2(t)$*, définie par* $f_s(t) = 2t - 1$*, vaut zéro pour* $t = 1/2$*, mais ne vaut pas zéro sur tout le segment, ce qui est réquis pour que* f_1 *et* f_2 *soient linéairement dépendantes.*

Soient c_1, c_2 des scalaires tels que $c_1 \sin t + c_2 \cos t = 0$ pour tout $t \in [0,1]$. Si ceci est vrai pour tout $t \in [0,1]$ alors il l'est aussi pour $t = 0$. En prenant $t = 0$, nous avons $\sin t = 0$ et $\cos t = 1$, ce qui donne $c_1 \cdot 0 + c_2 = 0$. Nous avons donc $c_2 = 0$. Maintenant, nous devons trouver les valeurs de c_1 telles que $c_1 \sin t = 0$ pour tout $t \in [0,1]$. En choisissant une valeur t^* tel que $\sin t^* \neq 0$, comme par exemple $t^* = \pi/6$, on obtient $c_2 \sin t^* = 0$, ce qui donne $c_2 = 0$ en divisant les deux côtés par $\sin t^*$. Donc, $c_1 \sin t + c_2 \cos t = 0$ si et seulement si $c_1 = 0$ et $c_2 = 0$, ce qui veut dire que $\cos t$ et $\sin t$ sont des fonctions continues linéairement indépendantes.

(b) Même question pour $\{t \mapsto \sin t,\ t \mapsto \sin t \cos t,\ t \mapsto \sin 2t\}$.

Solution : Solution abrégée : *Non car il existe une combinaison linéaire non triviale, $\sin 2t - 2 \sin t \cos t = 0$ pour tout $t \in [0,1]$.*

Solution détaillée : *Appellons $f_1(t) = \sin t$, $f_2(t) = \sin t \cos t$ et $f_3(t) = \sin 2t$. Dans ce cas, nous avons la rélation élémentaire $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$, ce qui implique $0 \cdot f_1(t) + 2f_2(t) - f_3(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$. Il existe donc trois scalaires (notamment $c_1 = 0$, $c_2 = 2$, $c_3 = -1$) différents de zéro et tels que $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + c_3 f_3(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$, et l'ensemble de vecteurs $\{f_1, f_2, f_3\}$ de $\mathcal{C}([0,1])$ est donc linéairement dépendant.*

Exercice 5

Prouver ou trouver un contre-exemple à l'énoncé suivant : Soit V un espace vectoriel. Si W_1, W_2, W_3 sont des sous-espaces vectoriels de V tels que $W_1 + W_3 = W_2 + W_3$, alors $W_1 = W_2$.
Solution : *C'est faux. Contre-exemple : $W_1 = \mathbb{R}^2$, $W_2 = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $W_3 = \{0\} \times \mathbb{R}$*

Exercice 6

Les équations en chimie traduisent les quantités de substances absorbées et produites au cours d'une réaction chimique. Lors de la combustion du méthane CH_4 par exemple, le méthane CH_4 réagit avec l'oxygène O_2 pour former du dioxyde de carbone CO_2 et de l'eau H_2O selon

$$\alpha_1 CH_4 + \alpha_2 O_2 \longrightarrow \alpha_3 CO_2 + \alpha_4 H_2O. \tag{1}$$

"Pondérer" cette équation signifie trouver des nombres entiers strictement positifs α_1, α_2, α_3, α_4 tels que le nombre total d'atomes de carbone (C), d'hydrogène (H) et d'oxygène (O) du membre de gauche et de droite soit égal (conservation de la matière).
Question : Pondérer l'équation (1).
Note : Les chimistes préfèrent les plus petits entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ qui "réalisent" la podération.
Pour cela, considérer pour chaque molécule de la réaction le vecteur

$$\begin{pmatrix} \text{nombre d'atomes de carbone} \\ \text{nombre d'atomes d'hydrogène} \\ \text{nombre d'atomes d'oxygène} \end{pmatrix}$$

et écrire le système linéaire associé sous la forme

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \alpha_3 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix},$$

puis résoudre le système.
Solution : *On a*

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On peut réécrire ce système linéaire sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La forme échelonnée réduite de la matrice augmentée est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les variables de base sont $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tandis que α_4 est une variable libre. La solution générale est $\alpha_1 = \alpha_4/2$, $\alpha_2 = \alpha_4$, $\alpha_3 = \alpha_4/2$ (infinité de solutions). On donne la solution entière la plus petite : $\boxed{\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 2}$.

Partiellement en classe

En classe on fera aussi d'autres exercices.

Exercice 7

On rappelle que $\mathbb{P}_3$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

(a) Les vecteurs de $\mathbb{P}_3$ suivants sont-ils linéairement indépendants ?

(i) p_1, p_2, p_3 tels que $p_1(t) = 1 - t^2$, $p_2(t) = t^2$, $p_3(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$.
Solution : *Oui. En effet,*
$x_1p_1(t) + x_2p_2(t) + x_3p_3(t) = x_1(1 - t^2) + x_2t^2 + x_3t = t^2(x_2 - x_1) + x_3t + x_1 = 0$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *ssi*

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 = 0, \end{cases}$$

i.e. $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

(ii) p_1, p_2, p_3 tels que $p_1(t) = 1 + t + t^2$, $p_2(t) = t + t^2$, $p_3(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$. ***Solution :*** *Oui.*

(b) Les vecteurs p_1, p_2, p_3 de (ii) forment-ils une base de $\mathbb{P}_3$? ***Solution :*** *Non, car* $\dim(\mathbb{P}_3) = 4$ *et il y a seulement trois vecteurs. Aucun des trois vecteurs ne permet d'engendrer un polynôme de degré égal à* 3.

Exercice 8

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le rang de A et la dimension du noyau de A.

Solution : *Les colonnes* 1, 2 *et* 4 *forment une base de* $\mathbb{R}^3$, *donc* $\mathrm{rg}(A) = 3$. *Par le théorème du rang, on a*

$$\dim \operatorname{Ker} A = (\text{nombre de colonnes de } A) - \mathrm{rg}(A) = 4 - 3 = 1.$$

b) Même question pour A^T.

Solution : $\mathrm{rg}(A^T) = \mathrm{rg}(A) = 3$.

$$\dim \operatorname{Ker} A^T = (\text{nombre de colonnes de } A^T) - \mathrm{rg}(A^T) = 3 - 3 = 0.$$

c) On suppose qu'une matrice A de taille 7×7 possède un pivot dans chaque ligne. Quel est le rang de A ? Quelle est la dimension du noyau de A ?

Solution : *A est équivalente à la matrice identité de taille* 7×7, *ainsi* $\mathrm{rg}(A) = 7$ *et* $\dim \operatorname{Ker} A = 0$.

d) On considère une matrice A de taille $m \times n$ et un vecteur $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Quelle doit être la relation entre le rang de $[\,A\ \mathbf{b}\,]$ et le rang de A pour que l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ soit compatible ?

Solution : $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *est compatible* $\Leftrightarrow$ $\mathbf{b}$ *est une combinaison linéaire des colonnes de* $A \Leftrightarrow \mathbf{b} \in \operatorname{Col} A \Leftrightarrow \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}([\,A\ \mathbf{b}\,])$.

Exercice 9

Soit $\mathcal{M}_2$ l'espace vectoriel des matrices de taille 2×2.

(a) Montrer que les matrices A, B et C données par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendantes.

Solution : $\alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

(b) Trouver a, b, c, d tels que pour $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, les matrices A, B, C, D forment une base de $\mathcal{M}_2$.

Solution : *On vient en fait de calculer au (i) que* $\operatorname{Span}\{A, B, C\}$ *est l'ensemble des matrices de la forme*

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Comme ce sous-espace est de dimension 3, pour obtenir une base de $\mathcal{M}_2$ *qui est de dimension* 4*, il suffit de trouver une matrice* D *qui n'est pas dans ce sous-espace, c-à-d pas de la forme ci-dessus. Il suffit donc de proposer une matrice* $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *telle que* $a \neq c + d$*. On peut donc proposer par exemple* $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$.

Méthode alternative :

$$\alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C + \alpha_4 D = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + a\alpha_4 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + b\alpha_4 \\ \alpha_2 + c\alpha_4 & \alpha_1 + d\alpha_4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 + \alpha_2 + a\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + b\alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + c\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + d\alpha_4 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 1 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Observons que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 1 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a - c - d = 0.$$

Ainsi, A, B, C, D *forment une base de* $\mathcal{M}_2 \Leftrightarrow a - c - d \neq 0$.

Exercice 10

Une base de $\mathbb{P}_d(\mathbb{R})$ est donnée par

A. $\{t, t^2, \dots, t^d\}$

B. $\{1, t, t^2, \dots, t^d\}$

C. $\{1, 1+t, 1+t+t^2, \dots, 1+t+\cdots+t^d\}$

(plusieurs réponses correctes).
Solution : *B et C.*

Exercice 11

Soit

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Alors

A. $\dim \mathrm{Vect}(E) = 3$

B. $\dim \mathrm{Vect}(E) = 2$

C. $\dim \mathrm{Vect}(E) = 1$

D. $\dim \mathrm{Vect}(E) = 0$

Solution : *B.*

Informations générales, séries et corrigés : cf.
`http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414`
Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications.* De Boeck, Bruxelles, 2005.