

## Série 4

### Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

1. déterminer si une famille de vecteurs est **libre** (aussi appelée **linéaire indépendante**) ou **liée** (aussi appelée **linéaire dépendante**);
2. déterminer le **sous-espace vectoriel engendré** par une famille de vecteurs;
3. connaître la définition d'**application linéaire**, ainsi que quelques propriétés basiques.

### Nouveau vocabulaire dans cette série

- sous-espace vectoriel engendré
- famille génératrice
- famille libre (ou linéairement indépendante)
- SEL homogène
- famille liée (ou linéairement dépendante)
- application linéaire

### Exercice 1

Soit  $W$  un espace vectoriel et  $W_1, W_2 \subseteq W$  deux sous-espaces vectoriels. Montrer que  $W_1 \cap W_2$  est aussi un sous-espace vectoriel.

### Exercice 2

Soit  $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices carrées de taille  $n \times n$ .

- (a) Montrer que le sous-ensemble  $\mathcal{S}_{n \times n}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  constitué des matrices symétriques est un sous-espace vectoriel.
- (b) Montrer que le sous-ensemble de  $\mathcal{A}_{n \times n}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  constitué des matrices antisymétriques est un sous-espace vectoriel.
- (c) Montrer que  $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{n \times n}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_{n \times n}(\mathbb{R})$ .

### Exercice 3

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

1. Soient  $V$  un espace vectoriel et  $H$  un sous-espace vectoriel de  $V$ . Alors on a aussi que  $V$  est un sous-espace vectoriel de lui-même (ou d'un espace vectoriel plus grand) et  $H$  est un espace vectoriel.

2. Si  $H$  est un sous-ensemble d'un espace vectoriel  $V$ , alors il suffit que  $0_V$  soit dans  $H$  pour que  $H$  soit un sous-espace vectoriel de  $V$ .

## Exercices optionnels

### Exercice 4

On rappelle que  $C([0, 1])$  est l'espace vectoriel des fonctions continues sur le segment  $[0, 1]$ .

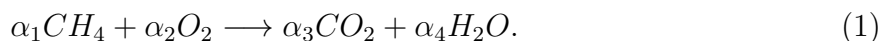
- (a) L'ensemble de vecteurs  $\{t \mapsto \sin t, t \mapsto \cos t\}$  est-il linéairement indépendant dans  $C([0, 1])$  ?
- (b) Même question pour  $\{t \mapsto \sin t, t \mapsto \sin t \cos t, t \mapsto \sin 2t\}$ .

### Exercice 5

Prouver ou trouver un contre-exemple à l'énoncé suivant : Soit  $V$  un espace vectoriel. Si  $W_1, W_2, W_3$  sont des sous-espaces vectoriels de  $V$  tels que  $W_1 + W_3 = W_2 + W_3$ , alors  $W_1 = W_2$ .

### Exercice 6

Les équations en chimie traduisent les quantités de substances absorbées et produites au cours d'une réaction chimique. Lors de la combustion du méthane  $CH_4$  par exemple, le méthane  $CH_4$  réagit avec l'oxygène  $O_2$  pour former du dioxyde de carbone  $CO_2$  et de l'eau  $H_2O$  selon



“Pondérer” cette équation signifie trouver des nombres entiers strictement positifs  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  tels que le nombre total d'atomes de carbone ( $C$ ), d'hydrogène ( $H$ ) et d'oxygène ( $O$ ) du membre de gauche et de droite soit égal (conservation de la matière).

Question : Pondérer l'équation (1).

*Note : Les chimistes préfèrent les plus petits entiers  $\alpha_1, \dots, \alpha_4$  qui “réalisent” la pondération.*

Pour cela, considérer pour chaque molécule de la réaction le vecteur

$$\begin{pmatrix} \text{nombre d'atomes de carbone} \\ \text{nombre d'atomes d'hydrogène} \\ \text{nombre d'atomes d'oxygène} \end{pmatrix}$$

et écrire le système linéaire associé sous la forme

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \alpha_3 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix},$$

puis résoudre le système.

## Partiellement en classe

En classe on fera aussi d'autres exercices.

### Exercice 7

On rappelle que  $\mathbb{P}_3$  est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

- (a) Les vecteurs de  $\mathbb{P}_3$  suivants sont-ils linéairement indépendants ?
- (i)  $p_1, p_2, p_3$  tels que  $p_1(t) = 1 - t^2$ ,  $p_2(t) = t^2$ ,  $p_3(t) = t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .
  - (ii)  $p_1, p_2, p_3$  tels que  $p_1(t) = 1 + t + t^2$ ,  $p_2(t) = t + t^2$ ,  $p_3(t) = t^2$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .
- (b) Les vecteurs  $p_1, p_2, p_3$  de (ii) forment-ils une base de  $\mathbb{P}_3$  ?

### Exercice 8

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

- a) Déterminer le rang de  $A$  et la dimension du noyau de  $A$ .
- b) Même question pour  $A^T$ .
- c) On suppose qu'une matrice  $A$  de taille  $7 \times 7$  possède un pivot dans chaque ligne. Quel est le rang de  $A$  ? Quelle est la dimension du noyau de  $A$  ?
- d) On considère une matrice  $A$  de taille  $m \times n$  et un vecteur  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Quelle doit être la relation entre le rang de  $[A \ \mathbf{b}]$  et le rang de  $A$  pour que l'équation  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  soit compatible ?

### Exercice 9

Soit  $\mathcal{M}_2$  l'espace vectoriel des matrices de taille  $2 \times 2$ .

- (a) Montrer que les matrices  $A, B$  et  $C$  données par  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  sont linéairement indépendantes.
- (b) Trouver  $a, b, c, d$  tels que pour  $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , les matrices  $A, B, C, D$  forment une base de  $\mathcal{M}_2$ .

### Exercice 10

Une base de  $\mathbb{P}_d(\mathbb{R})$  est donnée par

- A.  $\{t, t^2, \dots, t^d\}$
- B.  $\{1, t, t^2, \dots, t^d\}$
- C.  $\{1, 1+t, 1+t+t^2, \dots, 1+t+\dots+t^d\}$

(plusieurs réponses correctes).

### Exercice 11

Soit

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Alors

- A.  $\dim \text{Vect}(E) = 3$
- B.  $\dim \text{Vect}(E) = 2$
- C.  $\dim \text{Vect}(E) = 1$
- D.  $\dim \text{Vect}(E) = 0$

---

Copyright 2012 © Prof. Assyr Abdulle, Prof. Simone Deparis, Dr. Christian Urech.  
Informations générales, séries et corrigés : cf.

<http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414>

Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.